МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 539.3

А.Д. Матвеев

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УСЛОВИЙ ПРОЧНОСТИ*

В статье предложены процедуры расчета на прочность композитных трехмерных конструкций, которые сводятся к расчету на прочность трехмерных изотропных однородных тел (конструкций) с применением эквивалентных условий прочности. В основе предлагаемых процедур лежит следующее утверждение. Для всякой композитной конструкции V_0 существует такая изотропная однородная конструкция V_e и существуют такие числа n_a, n_b, что если коэффициент запаса n_e конструкции V_e удовлетворяет эквивалентным условиям прочности $n_a \le n_e \le n_b$, то коэффициент запаса n_0 конструкции V_0 удовлетворяет заданным условиям прочности $n_1 \le n_0 \le n_2$, где n_1, n_2 – заданы, и наоборот. Для ряда композитных конструкций регулярной структуры показаны процедуры построения изотропных однородных конструкций и эквивалентных условий прочности.

***Ключевые слова**: коэффициент запаса, композиты, однородные тела, эквивалентные по прочности конструкции, задача упругости, эквивалентные условия прочности, метод конечных элементов.*

A. Matveev

STRENGTH CALCULATION OF THE COMPOSITE CONSTRUCTIONS WITH THE EQUIVALENT STRENGTH CONDITION USE

The calculation procedures on the composite three-dimensional construction strength that are reduced to the calculation of the three-dimensional isotropic uniform bodies (constructions) strength with the application of the strength equivalent conditions are offered in the article. The following statement is the core of the offered procedures. For every composite construction V_0 there is such a homogeneous one as V_e and such numbers as n_a, n_b, that if the safety factor n_e of V_e construction satisfies the equivalent strength conditions $n_a \le n_e \le n_b$, then the safety factor n_0 of V_0 construction satisfies the given strength conditions $n_1 \le n_0 \le n_2$, where n_1, n_2 are given, and vice versa. For a number of composite constructions of the regular structure the procedures for constructing the isotropic homogeneous constructions and the equivalent safety conditions are shown.

***Key words**: safety factor, composites, homogeneous bodies, equivalent in strength constructions, elasticity problem, equivalent strength conditions, finite element method.*

Введение. Расчет на прочность конструкции является одним из важнейших на этапе эскизного проектирования [1], которое является технико-экономическим обоснованием проекта конструкции. Как правило, расчет на прочность конструкции проводится по запасам прочности [1, 2, 3]. Согласно этому расчету, для коэффициента запаса n_0 проектируемой конструкции V_0 заданные условия прочности имеют вид:

$$n_1 \le n_0 \le n_2, \tag{1}$$

где n_1, n_2 заданы, $n_1 \ge 1$.

* *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-00130).*

На этапе эскизного проектирования конструктору в первую очередь интересно знать, удовлетворяет или не удовлетворяет коэффициент запаса n_0 проектируемой конструкции V_0 заданным условиям прочности (1). Если коэффициент n_0 удовлетворяет заданным условиям прочности, то считают, что конструкция V_0 не разрушается при эксплуатации. Важно отметить, что если n_0 удовлетворяет условиям (1), то в этом случае нет необходимости детально исследовать напряженное состояние конструкции V_0. Итак, расчет на прочность конструкции V_0 сводится к нахождению ее коэффициента запаса n_0 и проверке условий прочности (1) для коэффициента n_0. Коэффициент запаса n_0 определяют по формуле $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$ [1, 2, 3], где σ_T – предельное напряжение конструкции V_0, σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение конструкции V_0. При анализе напряженного состояния композитных конструкций широко используют метод конечных элементов (МКЭ) [4, 5]. Следует отметить, что базовые дискретные модели композитных конструкций, которые состоят из конечных элементов (КЭ) первого порядка и учитывают их структуры, имеют очень высокую размерность [6], что порождает трудности при реализации МКЭ на ЭВМ.

В данной работе предложены процедуры расчета на прочность линейно упругих трехмерных композитных статически нагруженных конструкций (состоящих из пластичных материалов), которые сводятся к нахождению коэффициентов запаса для изотропных однородных конструкций и построению эквивалентных условий прочности. В основе предлагаемых процедур лежит следующее утверждение. Для любой композитной конструкции V_0 существует такая изотропная однородная конструкция V_e (т.е. конструкция V_e состоит из изотропного однородного материала) и существуют такие числа $n_a^e, n_b^e > 0$, что если коэффициент запаса n_e конструкции V_e удовлетворяет эквивалентным условиям прочности

$$n_a^e \le n_e \le n_b^e, \tag{2}$$

то коэффициент запаса n_0 конструкции V_0 удовлетворяет заданным условиям прочности (1), т.е. условиям $n_1 \le n_0 \le n_2$, где n_1, n_2 заданы; коэффициенты запаса n_e, n_0 конструкций V_e, V_0 определяем по 4-й теории прочности [3].

Достоинства предлагаемых процедур состоят в следующем. В расчетах используем изотропные однородные конструкции, которые имеют такие же формы и размеры, закрепления и нагружения, как заданные композитные конструкции. При анализе напряженного состояния изотропных однородных конструкций по МКЭ применяем КЭ высокого порядка, размеры которых больше размеров КЭ первого порядка базовых разбиений, так как при учете композитных структур по МКЭ (тонкие) волокна и дисперсные частицы (малых размеров) представляем КЭ первого порядка. Поэтому КЭ высокого порядка порождают дискретные модели однородных конструкций, размерности которых меньше размерностей базовых дискретных моделей композитных конструкций. Суть эквивалентных условий прочности заключается в следующем. Пусть две упругие конструкции V_0, V_e состоят из пластичных материалов, имеют одинаковые форму, размеры, закрепления, нагружения и условия эксплуатации, но отличаются модулями упругости. Пусть для коэффициента запаса n_0 конструкции V_0 заданы условия прочности (1). Пусть для коэффициента запаса n_e конструкции V_e заданы условия прочности (2). Если из выполнения для коэффициента запаса n_0 конструкции V_0 условий прочности (1) следует выполнение для коэффициента запаса n_e конструкции V_e условий прочности (2) и наоборот, то условия (1), (2) будем называть эквивалентными условиями прочности соответственно для конструкций V_0, V_e (коэффициенты запаса определяем по 4-й теории прочности). В данной работе для ряда композитных конструкций регулярной структуры, для которых заданы условия прочности вида (1), показаны процедуры построения изотропных однородных конструкций и эквивалентных условий прочности.

1. Основные положения для конструкций. В работе рассматриваем трехмерные линейно упругие изотропные однородные и композитные конструкции, которые расположены в декартовых системах координат, состоят из пластичных материалов, имеют гладкие границы, статические нагружения и одинаковые условия эксплуатации. Функции нагружений конструкций есть гладкие функции координат. Конструкции имеют закрепления, причем, границы закреплений конструкций не вырождаются в точки. Композитные конструкции состоят из компонент, т.е. из разномодульных тел, которые являются изотропными однородными телами с различными модулями упругости. Связи между разномодульными телами композитных конструкций идеальны, т.е. на общих границах разномодульных тел функции перемещений и напряжений композитных конструкций являются непрерывными. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных тел композитных конструкций отвечают соотношениям Коши и закону Гука трехмерной линейной задачи теории упругости [7]. Эквивалентные напряжения для всех конструкций определяем по 4-й теории прочности.

2. Эквивалентные условия прочности и эквивалентные по прочности конструкции. Пусть две конструкции V_1 и V_2 имеют одинаковые форму, геометрические размеры, закрепления и статические нагружения, но отличаются модулями упругости. Пусть для коэффициентов запаса n_1, n_2 соответственно конструкций V_1, V_2 заданы условия прочности

$$n_a^1 \le n_1 \le n_b^1, \tag{3}$$
$$n_a^2 \le n_2 \le n_b^2, \tag{4}$$

где $n_a^1, n_a^2 \ge 1$; $n_a^1, n_a^2, n_b^1, n_b^2$ заданы.

Для конструкций V_1, V_2 введем следующие два определения.

Определение 1. Если из выполнения условий (4) для коэффициента n_2 следует выполнение условий (3) для коэффициента n_1 и, наоборот, если из выполнения условий (3) для коэффициента n_1 следует выполнение условий (4) для коэффициента n_2, тогда условия прочности (3), (4) будем называть эквивалентными условиями прочности соответственно для конструкций V_1, V_2.

Определение 2. Пусть конструкции V_1, V_2, для которых соответственно условия (3), (4) являются эквивалентными условиями прочности, не разрушаются при одинаковых условиях эксплуатации. Тогда конструкции V_1, V_2 будем называть эквивалентными по прочности.

На практике эквивалентность по прочности конструкций V_1, V_2 означает, что вместо работающей конструкции V_1 можно использовать конструкцию V_2 и наоборот. Отметим, что из двух эквивалентных по прочности конструкций целесообразно использовать в работе такую конструкцию, которая более технологична в изготовлении, отвечает заданным техническим требованиям и требует меньше финансовых затрат на изготовление и эксплуатацию.

3. Теорема о существовании эквивалентных условий прочности. Рассмотрим следующую теорему для композитной конструкции V_0.

Теорема 1. Пусть на трехмерную линейно упругую композитную конструкцию V_0 действуют заданные статические поверхностные силы $\mathbf{q}$, т.е. силы, действующие на незакрепленной части границы S_q конструкции V_0, и объемные силы $\mathbf{p}$, где $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}^T$, $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$: q_x, q_y, q_z, p_x, p_y, p_z – гладкие функции координат x, y, z. На границе S_u конструкция V_0 жестко закреплена, т.е. на S_u: $u = v = w = 0$, $S_0 = S_u + S_q$, S_0 – граница конструкции V_0. Конструкция V_0 состоит из компонент V_i, т.е. из пластичных разномодульных изотропных однородных тел V_i, где $i = 1,\ldots,N$, N – общее число тел V_i конструкции V_0. Пусть максимальное эквивалентное напряжение композитной конструкции V_0 возникает в теле V_α, $1 \le \alpha \le N$. Пусть для коэффициента запаса n_0 конструкции V_0 заданы условия прочности

$$n_1 \le n_0 \le n_2, \tag{5}$$

где n_1, n_2 заданы, $n_1 \ge 1$.

Тогда существуют такая изотропная однородная конструкция V^b и такие числа n_1^p, n_2^p, что если коэффициент запаса n_b конструкции V^b удовлетворяет (эквивалентным) условиям прочности

$$n_1^p \le n_b \le n_2^p , \quad (6)$$

то коэффициент запаса n_0 композитной конструкции V_0 удовлетворяет условиям прочности (5), и наоборот. Если коэффициент запаса n_0 композитной конструкции V_0 удовлетворяет условиям (5), то коэффициент запаса n_b изотропной однородной конструкции V^b удовлетворяет условиям (6), причем между коэффициентами запаса n_0 , n_b взаимно существует однозначная связь.

Доказательство. Пусть однородная изотропная конструкция V^b и композитная конструкция V_0 имеют одинаковые форму, размеры, закрепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Пусть модули упругости конструкции V^b равны модулям упругости тела V_α конструкции V_0 , $1 \le \alpha \le N$. Коэффициенты запаса n_0 , n_b находим по формулам [1, 2, 3]:

$$n_0 = \sigma_T / \sigma_0 , \quad (7)$$

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b , \quad (8)$$

где σ_T – предел текучести тела V_α [3]; σ_0 , σ_b – максимальные эквивалентные напряжения, возникающие соответственно в конструкциях V_0 , V^b .

Пусть коэффициент n_0 удовлетворяет условиям прочности (5). Тогда подставляя (7) в (5), получим неравенства:

$$n_1 \le \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \le n_2 . \quad (9)$$

Существует такое число p , что

$$p = \sigma_0 / \sigma_b . \quad (10)$$

Учитывая (10) в (9), имеем

$$pn_1 \le \frac{\sigma_T}{\sigma_b} \le pn_2 . \quad (11)$$

Используя (8) в (11), получаем

$$pn_1 \le n_b \le pn_1 . \quad (12)$$

Существуют такие числа n_1^p , n_2^p , что

$$n_1^p = pn_1 , \; n_2^p = pn_2 . \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем, что для коэффициента n_b выполняются условия (6). Итак, существуют такие числа n_1^p , n_2^p , что коэффициент запаса n_b изотропной однородной конструкции V^b удовлетворяет условиям (6).

Обратно пусть коэффициент запаса n_b конструкции V^b удовлетворяет условиям прочности (6). Подставляя (8) в (6) и учитывая (10), (13), получим

$$pn_1 \le \frac{p\sigma_T}{\sigma_0} \le pn_2 .$$

Откуда с учетом (7) следует выполнение для коэффициента запаса n_0 композитной конструкции V_0 условий прочности (5). Итак, показано, что всякому коэффициенту $n_b \in (n_1^p , n_2^p)$ соответствует единственный коэффициент $n_0 \in (n_1, n_2)$, найденный по формуле (7), и, наоборот, всякому коэффициенту $n_0 \in (n_1, n_2)$ соответствует единственный коэффициент $n_b \in (n_1^p, n_2^p)$, отвечающий формуле (8). Рассмотрим предельные случаи. Пусть $n_b = n_1^p$. Используя соотношения (8), (13), (10) в последнем равенстве, получаем $p\sigma_T / \sigma_0 = pn_1$. Откуда с учетом (7) следует $n_0 = n_1$. Аналогично можно показать, что если $n_b = n_2^p$, то $n_0 = n_2$. Пусть $n_0 = n_1$. Используя (7), (10) в последнем равенстве, получаем $\sigma_T / \sigma_b = pn_1$. Откуда с учетом (8), (13) вытекает $n_b = n_1^p$. Аналогично можно показать, что если $n_0 = n_2$, то $n_b = n_2^p$. Таким образом, между коэффициентами запаса n_0 и n_b взаимно существует однозначная связь. Теорема 1 доказана.

Отметим, что условия (5), (6) являются эквивалентными условиями прочности соответственно для конструкций V_0, V^b (см. опр. 1, п. 2). Считают, что если n_0 удовлетворяет заданным условиям прочности (5), то конструкция V_0 не разрушается при эксплуатации. Пусть конструкция V^b не разрушается при эксплуатации. Тогда конструкции V_0, V^b являются эквивалентными по прочности (см. опр. 2, п. 2).

Итак, доказано существование изотропных однородных конструкций и эквивалентных условий прочности для композитных конструкций, имеющих любую структуру, форму, любые размеры, статические нагружения и закрепления, которые отвечают положениям п. 1 и условиям теоремы 1. Следует отметить, что для всякой композитной конструкции V_0 всегда можно построить изотропную однородную конструкцию V^b, т.е. всегда для конструкции V^b можно задать по определенным правилам форму, размеры, нагружение, закрепление и модули упругости. Однако в общем случае эквивалентные условия прочности для изотропной однородной конструкции V^b можно построить только для заданных усилий $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, что непрактично. Это связано с тем, что напряжения σ_b, σ_0 и параметры n_1^p, n_2^p, p отвечают заданному нагружению $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ конструкций V^b, V_0 (см. формулы (10), (13)).

4. Некоторые процедуры построения эквивалентных условий прочности. В основе предлагаемых процедур лежит теорема 1. На практике широко используют композиты, армированные непрерывными волокнами или дисперсными частицами (почти) одинаковых размеров [6]. При изложении предлагаемых процедур рассматриваем композитные конструкции волокнистой структуры.

4.1. Композитные конструкции регулярной структуры с коэффициентами наполнения, которые мало отличаются от единицы. Пусть трехмерная композитная конструкция V_0 имеет ортогональную решетку волокон регулярной структуры. Волокна имеют постоянную толщину и одинаковые модули упругости. Решетка волокон имеет одинаковый шаг по осям Ox, Oy, Oz. Пусть коэффициент наполнения $k_н$ [6] конструкции V_0 мало отличается от единицы (отметим, что $0 < k_н < 1$). Пусть максимальное эквивалентное напряжение конструкции V_0 возникает в волокне. Пусть однородная изотропная конструкция V^b и композитная конструкция V_0 имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение, но отличаются модулями упругости. Пусть модули упругости конструкции V^b равны модулям упругости волокна конструкции V_0. Пусть для коэффициента наполнения $k_н$ конструкции V_0 имеем $1 - k_н = \varepsilon$, где ε – малая величина. Расчеты показывают, что при $\varepsilon \le 0{,}15$ имеем $\sigma_0 \approx (1+\varepsilon)\sigma_b$, где σ_0, σ_b – максимальные эквивалентные напряжения, возникающие соответственно в конструкциях V_0, V^b. В этом случае в силу (10) считаем, что $p = 1 + \varepsilon$ и, учитывая (13), получаем $n_1^p = (1+\varepsilon)n_1$, $n_2^p = (1+\varepsilon)n_2$. Тогда согласно (6) для коэффициента запаса n_b изотропной однородной конструкции V^b эквивалентные условия прочности имеют вид:

$$n_1(1+\varepsilon) \le n_b \le n_2(1+\varepsilon). \tag{14}$$

4.2. Композитные пластины регулярной структуры. Рассмотрим трехмерную композитную пластину V_0^1 постоянной толщины и ортогональной решетчатой регулярной волокнистой структуры (решетка волокон имеет одинаковые шаги по осям Ox, Oy, Oz). Срединная плоскость пластины V_0^1 лежит в плоскости Oxy. Волокна имеют одинаковые толщины и модули упругости. Пластина V_0^1 имеет такие размеры и структуру, что с позиций макроподхода ее можно считать трехмерной изотропной однородной пластиной V_1^e с фиктивными модулями упругости E_1, ν_1, где E_1 – модуль Юнга, ν_1 – коэффициент Пуассона. Процедура нахождения фиктивных модулей упругости для трехмерных композитных тел регулярной структуры изложена в работе [8]. Пусть для коэффициента запаса n_0^1 пластины V_0^1 заданы условия прочности

$$n_1 \le n_0^1 \le n_2 . \tag{15}$$

Пусть трехмерные композитная пластина V_0^1 и изотропная однородная пластина V_1^b имеют одинаковые форму, размеры, закрепления и нагружения. Пусть модули упругости пластины V_1^b равны модулям упругости волокна композитной пластины V_0^1. Пусть размеры пластин V_1^b, V_1^e такие, что их можно считать пластинами Кирхгофа. Тогда, как известно [7, 9], деформирование изотропных однородных пластин V_1^b, V_1^e Кирхгофа описывается соответственно дифференциальными уравнениями:

$$\nabla^4 w_b = q_0 / D_b , \tag{16}$$

$$\nabla^4 w_e = q_0 / D_e , \tag{17}$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; $w_b(x,y)$ ($w_e(x,y)$) – прогиб пластины V_1^b (пластины V_1^e); q_0 – заданная поверхностная вертикальная нагрузка для пластин V_1^b, V_1^e; $q_0 = q_0(x,y)$ – гладкая функция координат; D_b, D_e – цилиндрические (изгибные) жесткости соответственно пластин V_1^b, V_1^e, определяемые по формулам [7]:

$$D_b = E_b h^3 /[12(1-\nu_b^2)] , \; D_e = E_1 h^3 /[12(1-\nu_1^2)] , \tag{18}$$

E_b, ν_b – модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропной однородной пластины V_1^b ; h – толщина пластин V_1^b, V_1^e, т.е. композитной пластины V_0^1.

Введем параметр α_1:

$$\alpha_1 = D_b / D_e . \tag{19}$$

С учетом (19) уравнение (17) запишем в виде

$$\nabla^4 w_e = \alpha_1 q_0 / D_b . \tag{20}$$

Из сравнения уравнений (16), (20) следует, что решения w_b, w_e связаны соотношением $w_e = \alpha_1 w_b$, а значит, $\boldsymbol{\sigma}_e^1 = \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}_b^1$, где $\boldsymbol{\sigma}_e^1, \boldsymbol{\sigma}_b^1$ – векторы напряжений соответственно пластин V_1^e, V_1^b. В силу $w_e = \alpha_1 w_b$, $\sigma_e^1 = \alpha_1 \sigma_b^1$ и однородности функции f вычисления эквивалентных напряжений по 4-й теории прочности, получаем $\sigma_e^1 = max\, f(\boldsymbol{\sigma}_e^1) = max\, f(\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}_b^1) = \alpha_1 max\, f(\boldsymbol{\sigma}_b^1) = \alpha_1 \sigma_b^1$, где $\sigma_b^1 = max\, f(\boldsymbol{\sigma}_b^1)$;

σ_e^1, σ_b^1 – максимальные эквивалентные напряжения соответственно изотропных однородных пластин V_1^e, V_1^b.

Итак, имеем $\sigma_e^1 = \alpha_1 \sigma_b^1$. Пусть коэффициент наполнения $k_н$ пластины V_0^1 удовлетворяет условию $0{,}85 \le k_н < 1$. Расчеты показывают, что в этом случае максимальное эквивалентное напряжение σ_0^1 композитной пластины V_0^1 отличается от напряжения σ_e^1 не более чем на 15 %, что является вполне удовлетворительной погрешностью для инженерных расчетов. Поэтому в первом приближении можно принять, что $\sigma_0^1 = \sigma_e^1$. Из равенства $\sigma_e^1 = \alpha_1 \sigma_b^1$ с учетом, что $\sigma_0^1 = \sigma_e^1$, получаем $\sigma_0^1 = \alpha_1 \sigma_b^1$. Отсюда

$$\alpha_1 = \sigma_0^1 / \sigma_b^1 . \tag{21}$$

На основании теоремы 1 имеем $p = \sigma_0^1 / \sigma_b^1$, отсюда, учитывая (21), получаем

$$p = \alpha_1 . \tag{22}$$

В силу (13), (22), имеем $n_1^p = \alpha_1 n_1$, $n_2^p = \alpha_1 n_2$, и тогда для коэффициента запаса n_b^1 однородной изотропной пластины V_1^b эквивалентные условия прочности имеют вид

$$\alpha_1 n_1 \le n_b^1 \le \alpha_1 n_2 , \tag{23}$$

где $\alpha_1 = D_b / D_e$ (см. (19)); D_b, D_e – изгибные жесткости соответственно пластин V_1^b, V_1^e.

Замечание 1. Отметим, что параметр α_1, т.е. в силу (22) параметр p, зависит лишь только от изгибных жесткостей D_b, D_e изотропных однородных пластин V_1^b, V_1^e (см. соотношения (19), (18)), т.е. параметр α_1 (параметр p) зависит от вида регулярной структуры и физических параметров композитной пластины V_0^1.

Процедура нахождения параметра α_1, т.е параметра p, сводится к следующему. Для композитной пластины V_0^1 постоянной толщины h строим изотропные однородные пластины V_1^e, V_1^b. При этом фиктивные модули упругости E_1, ν_1 трехмерной пластины V_1^e находим по алгоритмам, которые изложены в работе [8]. По формулам (18) определяем изгибные жесткости D_b, D_e пластин V_1^e, V_1^b. По формуле (19) находим параметр α_1 и эквивалентные условия прочности для изотропной однородной пластины V_1^b записываем в виде (23). Из теоремы 1 следует, что если для коэффициента запаса n_b^1 изотропной однородной пластины V_1^b выполняются условия (23), то для коэффициента запаса n_0^1 композитной пластины V_0^1 выполняются заданные условия прочности (15).

4.3. Композитные балки регулярной структуры. Рассмотрим трехмерную композитную балку V_0^2 постоянного поперечного сечения, которая имеет регулярную ортогональную решетчатую волокнистую структуру. Решетка волокон имеет одинаковые шаги по осям Ox, Oy, Oz. Волокна имеют одинаковые толщины и модули упругости. Пусть срединная плоскость балки V_0^2 лежит в плоскости xOz. Ось балки V_0^2 совпадает с осью Ox, ось Oy направлена вверх. Балка V_0^2 нагружена вертикальной нагрузкой $q(x)$, где $q(x)$ – гладкая функция. Пусть для коэффициента запаса n_0^2 балки V_0^2 заданы условия прочности

$$n_1 \le n_0^2 \le n_2 . \tag{24}$$

Пусть размеры и структура балки V_0^2 таковы, что с точки зрения макроподхода композитную балку V_0^2 можно рассматривать как некоторую трехмерную изотропную однородную балку V_2^e. Отметим, что балки V_0^2, V_2^e имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение. Фиктивные модули упругости E_2^e, ν_2^e для трехмерной балки V_2^e (где E_2^e – модуль Юнга; ν_2^e – коэффициент Пуассона) находим по алгоритмам, которые изложены в работе [8]. Пусть изотропная однородная балка V_2^b и композитная балка V_0^2 имеют одинаковые форму, размеры, закрепления и нагружения. Пусть модули упругости изотропной однородной балки V_2^b равны модулям упругости волокна композитной балки V_0^2. Пусть изотропные однородные балки V_2^b, V_2^e являются балками Кирхгофа. Ось балки V_2^b (балки V_2^e) совпадает с осью Ox, а ось Oy направлена вверх. Дифференциальные уравнения изогнутых осей балок V_2^e, V_2^b соответственно запишем в виде [9, 10]:

$$\frac{\partial^2 y_e}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{E_2^e J_z}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{E_2^b J_z}, \tag{26}$$

где $M(x)$ – изгибающий момент для балок V_2^e, V_2^b, порожденный нагрузкой $q(x)$; J_z – момент инерции поперечного сечения балки V_2^e (балки V_2^b) относительно оси Oz; $y_e(x)$, $y_b(x)$ – функции прогибов соответственно балок V_2^e, V_2^b; E_2^b – модуль Юнга балки V_2^b.

Введем параметр α_2 по формуле

$$\alpha_2 = E_2^b / E_2^e. \tag{27}$$

С учетом (27) уравнение (25) представим как

$$\frac{\partial^2 y_e}{\partial x^2} = \alpha_2 \frac{M(x)}{E_2^b J_z}. \tag{28}$$

Отметим, что правые части уравнений (26), (28) отличаются множителем α_2.

Следовательно, $y_e = \alpha_2 y_b$, а, значит, $\sigma_e^2 = \alpha_2 \sigma_b^2$, где σ_e^2, σ_b^2 – максимальные эквивалентные напряжения соответственно балок V_2^e, V_2^b. Пусть $0{,}85 \le k_н < 1$, где $k_н$ – коэффициент наполнения композитной балки V_0^2. Расчеты показывают, что в этом случае максимальное эквивалентное напряжение σ_0^2 композитной балки V_0^2 мало отличается от напряжения σ_e^2 (не более чем на 10 %). Поэтому в первом приближении можно считать, что $\sigma_0^2 = \sigma_e^2$. Согласно теореме 1, имеем $p = \sigma_0^2 / \sigma_b^2$. Из равенства $p = \sigma_0^2 / \sigma_b^2$, используя (27) и соотношения $\sigma_0^2 = \sigma_e^2$, $\alpha_2 = \sigma_e^2 / \sigma_b^2$, получаем $p = \alpha_2 = E_2^b / E_2^e$. Эквивалентные условия прочности для коэффициента запаса n_b^2 балки V_2^b в силу (13), (6) представим в форме

$$\alpha_2 n_1 \le n_b^2 \le \alpha_2 n_2. \tag{29}$$

Из теоремы 1 следует, что если для коэффициента запаса n_b^2 изотропной однородной балки V_2^b выполняются условия (29), то для коэффициента запаса n_0^2 композитной балки V_0^2 выполняются заданные условия прочности (24).

Замечание 2. Отметим, что параметр α_2, т.е. параметр p, зависит лишь только от модулей упругости E_2^b, E_2^e соответственно изотропных однородных балок V_2^b, V_2^e (см. соотношение (27)), т.е. параметр α_2 (параметр p) зависит только от вида регулярной структуры и физических параметров композитной балки V_0^2.

4.4. Трехмерные композитные конструкции регулярной структуры. Не теряя общности суждений, рассмотрим закрепленную трехмерную композитную конструкцию V_0 регулярной волокнистой структуры, для которой заданы поверхностные $\mathbf{q}$ и объемные $\mathbf{p}$ силы. Волокна имеют одинаковые модули упругости и толщину. Пусть изотропная однородная конструкция V^b и конструкция V_0 имеют одинаковые форму, размеры, заданные закрепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Модули упругости конструкции V^b равны модулям упругости волокна композитной конструкции V_0. Считаем, что композитная конструкция V_0 имеет такие характерные геометрические размеры, что с позиций макроподхода конструкцию V_0 можно рассматривать как некоторое однородное тело. Построение эквивалентных условий прочности для коэффициентов запаса конструкции V^b сводится к определению параметра p. В основе предлагаемой процедуры нахождения параметра p лежит следующее положение.

Положение 1. Считаем, что значение параметра p зависит лишь только от вида структуры и физических характеристик композитной конструкции V_0 регулярной структуры.

Отметим, что в п. 4.2–4.3 показано, что когда коэффициент наполнения $k_н$ композитных пластин и балок регулярной решетчатой волокнистой структуры лежит в диапазоне $0{,}85 \le k_н < 1$, параметр p зависит только от вида структуры и физических характеристик пластин, балок (см. замечания 1, 2). Таким образом, положение 1, по сути, является обобщением результатов, полученных в п. 4.2–4.3. Из положения 1 следует, что достаточно определить параметр p для любой композитной конструкции V_d, которая имеет такую же неоднородную структуру и физические характеристики, как и заданная композитная конструкция V_0 регулярной структуры, и которую с точки зрения макроподхода [6] можно считать однородным телом. Параметр p находим с помощью расчетов, например, используя МКЭ. Для удобства расчетов выбираем конструкцию V_d, характерные размеры которой меньше размеров конструкции V_0 и которая имеет простую форму (например, форму прямоугольного параллелепипеда). Конструкция V_d включает кратное число регулярных ячеек композитной конструкции V_0. Для конструкции V_d задаем поверхностные $\mathbf{q}_1$ и объемные $\mathbf{p}_1$ силы, которые удобны для расчетов и отражают характер нагружения конструкции V_0. Например, если для конструкции V_0 заданы силы $\mathbf{q} = const,\ \mathbf{p} = 0$, то для конструкции V_d задаем силы типа $\mathbf{q}_1 = const$, $\mathbf{p}_1 = 0$. Пусть композитная конструкция V_d и изотропная однородная конструкция V^m имеют одинаковые форму, размеры, нагружения и закрепления. Модули упругости конструкции V^m равны модулям упругости волокна конструкции V_d. Находим максимальные эквивалентные напряжения: σ_d – для конструкции V_d, σ_m – для конструкции V^m. Параметр p, используемый для построения эквивалентных условий прочности для конструкции V^m в силу положения 1 для конструкции V^b и согласно теореме 1 находим по формуле:

$$p = \sigma_d / \sigma_m. \tag{30}$$

5. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим модельную задачу о расчете на прочность трехмерной линейно упругой композитной конструкции V_0 регулярной структуры. Композитная конструкция V_0, имеющая форму типа двутавровой балки [3] (рис. 1), армирована непрерывными изотропными однородными продольными волокнами сечения $2h \times 2h$, т.е. волокна направлены вдоль оси Oy. Расстояние между волокнами в направлении осей Ox, Oz равно $2h$. Регулярная ячейка конструкции V_0 имеет размеры $4h \times 4h \times 4h$. На рис. 2 показано сечение регулярной ячейки в плоскости, параллельной плоскости xOz, сечение волокна заштриховано.

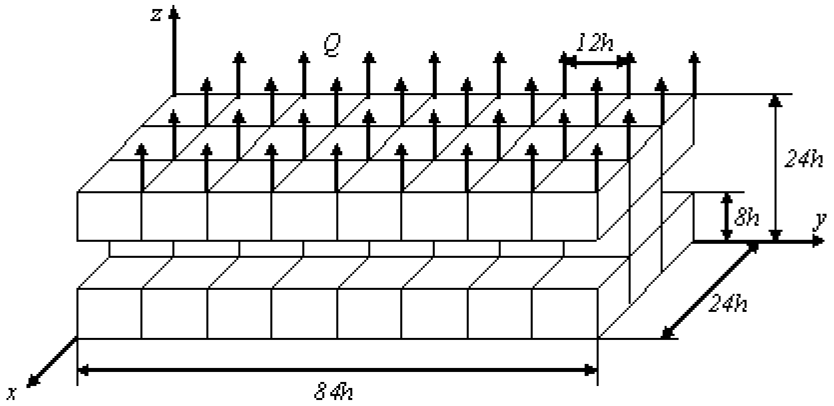

Рис. 1. Конструкция V_0 (V^b)

При $y = 0$: $u = v = w = 0$, т.е. в плоскости xOz конструкция V_0 закреплена. Пусть для коэффициента запаса n_0 композитной конструкции V_0 заданы условия прочности вида (5), где $n_1 = 1{,}3$, $n_2 = 2$, т.е. заданы условия

$$1{,}3 \le n_0 \le 2. \tag{31}$$

Для конструкции V_0 используем следующие данные:

$$h = 0{,}5;\ \sigma_T = 5{,}5;\ E_b = 10,\ E_c = 1,\ \nu_c = \nu_b = 0{,}3, \tag{32}$$

где E_c, E_b (ν_c, ν_b) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и волокон; σ_T – предел текучести волокна.

Для конструкции V_0 заданы силы $Q = 0{,}135$, направленные вертикально вверх и действующие в точках с координатами x_i, y_j, z_0, где $z_0 = 24h$, $x_i = 2h(i-1)$, $i = 1,\ldots,13$, $y_j = 12h + 12h(j-1)$, $j = 1,\ldots,7$, Силы Q схематично показаны на рис. 1. Пусть композитной конструкции V_0 отвечает изотропная однородная конструкция V^b (см. п. 4.4). Параметр p находим по процедуре, изложенной в п. 4.4. Рассмотрим конструкцию V_d формы прямоугольного параллелепипеда размерами $16h \times 72h \times 16h$ (рис. 3), меньших размеров, чем конструкции V_0 (рис. 1). Конструкция V_d имеет такую же композитную структуру и физические характеристики, как конструкция V_0. При $y = 0$ конструкция V_d закреплена, т.е. при $y = 0$: $u = v = w = 0$. Следуя п. 4.4, для конструкции V_d задаем силы $q = 0{,}12$, направленные вертикально вверх и приложенные в точках с координатами x_i, y_j, z_0, где $z_0 = 16h$, $x_i = 2h(i-1)$, $i = 1,\ldots,9$, $y_j = 12h + 12h(j-1)$, $j = 1,\ldots,5$, силы q схематично показаны на рис. 3. При расчете конструкции V_d используем данные (32). Модуль Юнга изотропной однородной конструкции V^m равен 10, коэффициент Пуассона – 0,3, предел текучести материала конструкции V^m – 5,5.

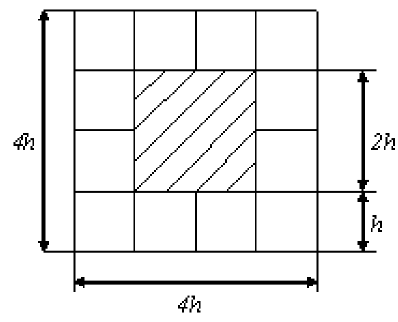

Рис. 2. Сечение регулярной ячейки

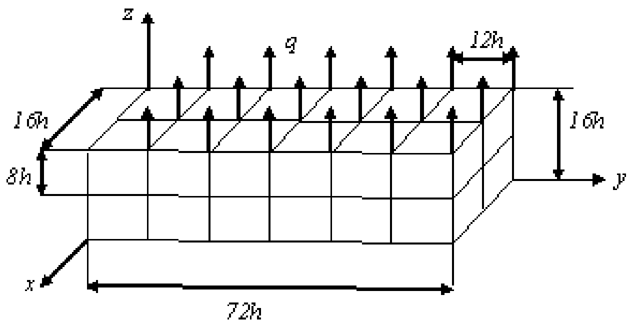

Рис. 3. Конструкция V_d (V^m)

Базовое разбиение композитной конструкции V_d состоит из изотропных однородных КЭ первого порядка формы куба со стороной h и учитывает ее неоднородную структуру. Для расчета изотропной однородной конструкции V^m по МКЭ используем лагранжевый КЭ V_e формы прямоугольного параллелепипеда размерами $8h \times 12h \times 8h$, шаг сетки которого по осям Ox, Oz равен $2h$, по оси Oy – $3h$, т.е. по осям Ox, Oy, Oz лагранжевый КЭ имеет четвертый порядок аппроксимаций. На рис. 3 представлено разбиение однородной конструкции V^m на КЭ V_e. Расчеты показывают, что $\sigma_d = 4{,}208$, $\sigma_m = 1{,}454$, где σ_d, σ_m – максимальные эквивалентные напряжения соответственно конструкций V_d, V^m. Параметр p находим по формуле (30), т.е. $p = \sigma_d / \sigma_m = 2{,}894$. Подставляя $n_1 = 1{,}3$, $n_2 = 2$, $p = 2{,}894$ в формулу (13), находим $n_1^p = 3{,}762$, $n_2^p = 5{,}788$, и тогда согласно (6) эквивалентные условия прочности для коэффициентов запаса n_b изотропной однородной конструкции V^b имеют вид

$$3{,}762 \le n_b \le 5{,}788. \tag{33}$$

Для расчета изотропной однородной конструкции V^b по МКЭ используем лагранжевый КЭ V_e (размерами $8h \times 12h \times 8h$), описанный выше. На рис. 1 представлено разбиение конструкции V^b на КЭ V_e. Расчет конструкции V^b показывает, что максимальное эквивалентное напряжение равно $\sigma_b = 1{,}219$. Коэффициент запаса n_b конструкции V^b равен $n_b = \sigma_T / \sigma_b = 5{,}5/1{,}219 = 4{,}511$. Коэффициент $n_b = 4{,}511$ удовлетворяет эквивалентным условиям прочности (33). Тогда согласно теореме 1 коэффициент запаса n_0 композитной балки V_0 удовлетворяет заданным условиям прочности (31). Покажем, что коэффициент запаса n_0 композитной конструкции V_0 удовлетворяет условиям (31). Напряженное состояние конструкции V_0 определяем с помощью МКЭ. Дискретная базовая модель $\mathbf{R}_0$ конструкции V_0 состоит из КЭ первого порядка формы куба со стороной h, которая учитывает ее структуру. Анализ расчетов показывает, что максимальное эквивалентное напряжение σ_0 конструкции V_0 равно $\sigma_0 = 3{,}624$. Подставляя

$\sigma_T = 5{,}5$, $\sigma_0 = 3{,}624$ в формулу $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, получаем $n_0 = 1{,}517$. Отметим, что коэффициент $n_0 = 1{,}517$ удовлетворяет заданным условиям прочности (31). Напряжения σ_d, σ_m, σ_0 вычисляем по 4-й теории прочности.

Итак, согласно известной процедуре [1, 2, 3], коэффициент запаса n_0 конструкции V_0 находим по формуле $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$. Для анализа напряженного состояния конструкции V_0, т.е. для определения напряжения σ_0 по МКЭ используем дискретную базовую модель $\mathbf{R}_0$ композитной конструкции V_0, которая содержит 129276 узловых неизвестных, а ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 3240. Предлагаемая процедура (см. п. 4.4) сводится к определению коэффициента запаса n_b и эквивалентных условий прочности для конструкции V^b. Для нахождения коэффициента запаса n_b конструкции V^b используем дискретную модель $\mathbf{R}_b$ (состоящую из лагранжевых КЭ V_e) размерности 12180; ширина ленты СУ МКЭ равна 3822. Реализация МКЭ для дискретной модели $\mathbf{R}_b$ требует в 9 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели $\mathbf{R}_0$. При построении эквивалентных условий прочности используем дискретную модель $\mathbf{R}_d$ конструкции V_d размерности 62424 (ширина ленты СУ МКЭ равна 1848) и дискретную модель $\mathbf{R}_m$ конструкции V^m, которая имеет 5832 узловых неизвестных (ширина ленты СУ МКЭ равна 2190). Реализация МКЭ для дискретной модели $\mathbf{R}_d$ (для модели $\mathbf{R}_m$) требует в 3,6 раза (в 32,8 раза) меньше объема памяти ЭВМ, чем для дискретной базовой модели $\mathbf{R}_0$. Достоинство предлагаемой процедуры (см. п. 4.4) состоит в том, что ее реализация на основе МКЭ требует меньше объема памяти ЭВМ, чем известная процедура.

Литература

1. *Москвичев В.В.* Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. – Новосибирск: Наука, 2002.
2. *Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1993.
3. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
5. *Норри Д., де-Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1987.
6. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982.
7. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982.
8. *Матвеев А.Д.* Определение фиктивных модулей упругости для трехмерных композитов на основе жесткостных соотношений однородных конечных элементов // Вестн. КрасГАУ. – 2008. – № 5. – С. 34–47.
9. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988.
10. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1958.