

МНОГОСЕТОЧНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ТРЕХМЕРНОМ АНАЛИЗЕ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ И ОБОЛОЧЕК*

Предложены процедуры построения в локальных декартовых системах координат криволинейных лагранжевых двухсеточных конечных элементов (ДвКЭ) и сложных многосеточных конечных элементов (МнКЭ) для расчета трехмерных упругих композитных цилиндрических панелей и оболочек с различными коэффициентами заполнения. Расчеты панелей волокнистой структуры показывают, что максимальные эквивалентные напряжения и перемещения базовых и двухсеточных (многосеточных) дискретных моделей панелей отличаются на 1–8 %. Реализация метода конечных элементов для двух- и многосеточных дискретных моделей панелей требует в $10^3 \div 10^4$ раз меньше объема памяти ЭВМ и в $10^2 \div 10^3$ раз меньше временных затрат, чем для базовых.

Ключевые слова: композиты, упругость, цилиндрические оболочки и панели, сложные многосеточные и двухсеточные лагранжевые криволинейные элементы.

A.D. Matveev, A.N. Grishanov

MULTIGRID LAGRANGIAN CURVILINEAR ELEMENTS IN THE THREE-DEMENSIONAL ANALYSIS OF THE COMPOSITE CYLINDRICAL PANALS AND SHELLS

The procedures for constructing the curvilinear Lagrangian double-grid finite elements (DGFE) and complex multigrid finite elements (MGFE) in the local Cartesian systems to calculate the elastic composite cylindrical panels and shells are offered. The calculations of the fibrous structure panels demonstrate that the maximum equivalent tension and displacement of the basic and double-grid (multigrid) discrete panel models differ by 1–8 %. The implementation of the finite element method for two- and multigrid discrete models of panels requires $10^3 \div 10^4$ times less of the computer's memory and $10^2 \div 10^3$ times less of temporal costs than for the basic model.

Key words: composites, elasticity, cylindrical shells and panels, complex multigrid and double-grid Lagrangian curvilinear elements.

Введение. Как известно, общий недостаток теорий деформирования упругих композитных цилиндрических панелей и оболочек заключается в том, что в их основе лежат гипотезы, которые недостаточно точно отражают законы перемещений и напряжений. Поэтому уравнения этих теорий порождают приближенные решения с неустранимой погрешностью. Кроме того, существующие теории не учитывают сложный характер закреплений, например частичное закрепление по толщине толстых панелей и оболочек, не всегда достаточно точно описывают по методу конечных элементов (МКЭ) с применением мелких разбиений деформирование панелей, оболочек, имеющих локальные нагрузки.

В данной работе изложены процедуры построения в локальных декартовых системах координат криволинейных лагранжевых ДвКЭ и сложных МнКЭ, которые используются для расчета (по МКЭ с применением мелких разбиений) линейно упругих трехмерных композитных цилиндрических панелей и оболочек с различными коэффициентами заполнения. Лагранжевые ДвКЭ и сложные МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда, применяемые для анализа упругих тел неоднородной структуры, изложены в работах [1–3]. Процедуры построения трехмерных криволинейных ДвКЭ в локальных декартовых системах координат с применением известных интерполяционных полиномов 1-го, 2-го и 3-го порядков рассмотрены в работах [4, 5].

Предлагаемые криволинейные лагранжевые элементы проектируются на основе базовых дискретных моделей, которые учитывают неоднородную (микрон неоднородную) структуру трехмерных композитных панелей и оболочек и имеют очень высокую размерность. Для построения ла-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-0130).

гранжевых ДвКЭ применяем две вложенные трехмерные криволинейные сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка порождена базовым разбиением ДвКЭ, которое учитывает его неоднородную структуру. На базовом разбиении строим функционал полной потенциальной энергии ДвКЭ в матричной форме по МКЭ [6, 7]. На мелкой сетке выделяем криволинейную крупную сетку, на которой определяем полиномы Лагранжа. Показаны две процедуры построения в локальных декартовых системах координат трехмерных криволинейных лагранжевых ДвКЭ.

Согласно первой процедуре, в функционале полной потенциальной энергии ДвКЭ V_a с помощью полиномов Лагранжа (построенных на крупной сетке) выражаем узловые перемещения мелкой сетки через узловые перемещения крупной. Затем, минимизируя функционал по узловым перемещениям крупной сетки, получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил криволинейного лагранжевого ДвКЭ V_a .

Суть второй процедуры заключается в следующем. Вначале область лагранжевого ДвКЭ V_b представляем криволинейными шестигранными суперэлементами, которые построены с помощью метода конденсации [6, 7] на базовом разбиении ДвКЭ V_b . Вершины суперэлементов совпадают с узлами крупной сетки ДвКЭ V_b . Функционал полной потенциальной энергии, составленный для всех суперэлементов, представляем в матричной форме. В функционале ДвКЭ V_b с помощью полиномов Лагранжа (построенных на крупной сетке) узловые перемещения суперэлементов выражаем через узловые перемещения крупной сетки. Минимизируя функционал энергии по узловым перемещениям крупной сетки, получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил криволинейного лагранжевого ДвКЭ V_b .

Показана процедура построения криволинейных лагранжевых сложных МКЭ, которые проектируются с применением лагранжевых криволинейных ДвКЭ. При построении криволинейных лагранжевых ДвКЭ и сложных МКЭ используем однородные криволинейные односеточные конечные элементы (КЭ) 1-го порядка, которые построены в работах [4, 5] в локальных декартовых системах координат. На рисунке 1 представлен односеточный однородный криволинейный КЭ V_e 1-го порядка, где α_e – угол раствора КЭ V_e ; $O_1x_1y_1z_1$ – локальная декартовая система координат; Oy_1z_1 – плоскость симметрии; cd – ось цилиндрической панели, оболочки; h_z^e – толщина; h_y^e – длина КЭ V_e ; R_1^e , R_2^e – радиусы нижней и верхней поверхностей КЭ V_e , узлы отмечены точками (8 узлов). Прямоугольники размерами $h_z^e \times h_y^e$ есть боковые грани, криволинейные прямоугольники – торцевые грани КЭ V_e . Форма КЭ V_e есть прямая призма высотой h_y^e .

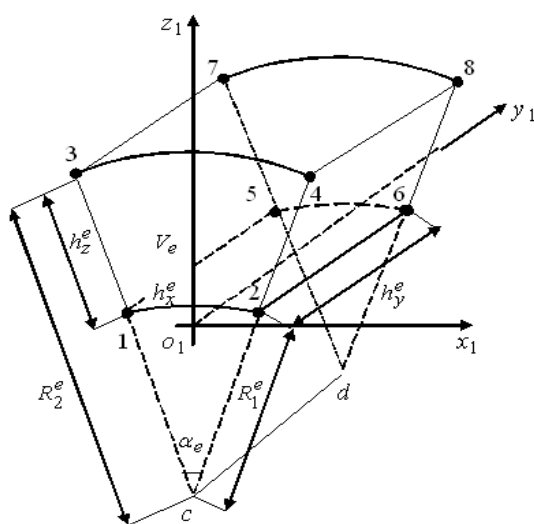


Рис. 1. Односеточный КЭ V_e 1-го порядка

Поскольку при мелком разбиении угол раствора α_e криволинейного КЭ V_e мал (рис. 1), то его форма мало отличается от формы прямоугольного параллелепипеда. В связи с этим при построении по МКЭ функций перемещений для однородных криволинейных КЭ V_e 1-го, 2-го и 3-го порядков используем соответственно известные интерполяционные полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядков [6, 7] и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных декартовых системах координат $Ox_1y_1z_1$ данных КЭ. Таким образом, в КЭ V_e реализуется трехмерное напряженное деформированное состояние. Поскольку при построении лагранжевых криволинейных ДвКЭ и сложных МнКЭ используем конечные элементы V_e 1-го порядка (рис. 1), то ДвКЭ и сложные МнКЭ также описывают трехмерное напряженное состояние в цилиндрических панелях и оболочках. Матрицы жесткости и векторы узловых сил криволинейных ДвКЭ и сложных МнКЭ определяем в локальных декартовых системах координат, а системы уравнений МКЭ для дискретных моделей оболочек и панелей – в глобальных декартовых системах координат. Связь между локальными и глобальными системами координат осуществляем с помощью матриц вращений [6], которые определяем только для узловых перемещений ДвКЭ и сложных МнКЭ.

1. Криволинейные лагранжевые ДвКЭ. Изложим две процедуры построения композитных трехмерных криволинейных лагранжевых ДвКЭ на примере лагранжевых ДвКЭ V_a , V_b 3-го порядка, при построении которых используем полиномы Лагранжа 3-го порядка (рис. 2), где $Oxyz$ ($O\xi\eta\zeta$) – локальная декартовая (криволинейная) система координат; оси Oy , $O\eta$ совпадают; h_z^a – толщина; h_y^a – длина ДвКЭ V_a ; R_1 – радиус нижней поверхности; α_a – угол раствора ДвКЭ V_a (V_b).

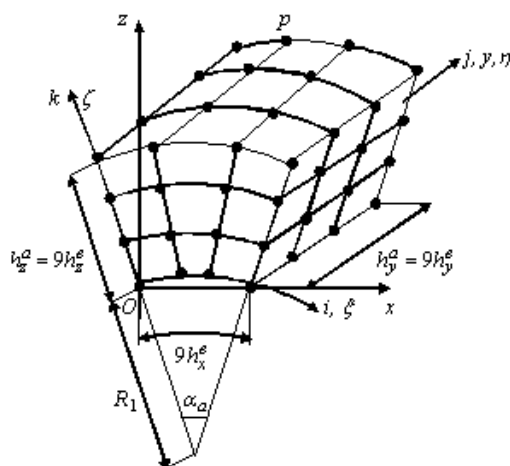


Рис. 2. ДвКЭ V_a (V_b)

Считаем, что угол α_a мал, т.е. криволинейная форма ДвКЭ V_a мало отличается от формы прямоугольного параллелепипеда. Пусть между компонентами композитного ДвКЭ V_a связи идеальны. Не теряя общности суждений, считаем, что ДвКЭ V_a армирован волокнами, направленными вдоль оси Oy . Область ДвКЭ V_a представим базовым разбиением R_a , которое состоит из однородных односеточных КЭ V_e 1-го порядка (рис. 1) с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$, где $e = 1, \dots, M$; M – общее число КЭ V_e базового разбиения R_a . Отметим, что поскольку функции перемещений, напряжений и деформаций компонентов КЭ V_e удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, которые отвечают трехмерной задаче теории упругости, то в области ДвКЭ V_a реализуется трехмерное напряженное состояние. На рисунке 3 сечение ДвКЭ V_a представлено узловой сеткой базового разбиения, сечения волокон закрашены.

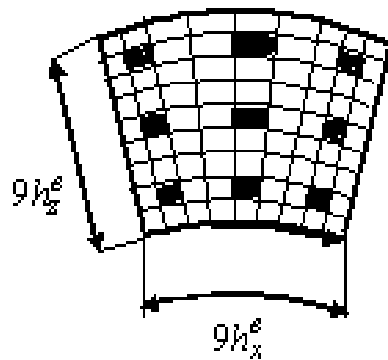


Рис. 3. Сечение ДвКЭ V_a (V_b)

Базовое разбиение R_a учитывает неоднородную структуру ДвКЭ V_a и порождает мелкую ортогональную криволинейную сетку h_a . Отметим, что базовые разбиения R_a двухсеточных КЭ V_a , из которых состоит панель (оболочка), образуют базовую дискретную модель панели (оболочки). Пусть $h_y^e = h_z^e = \alpha_e = \text{const}$, $e = 1, \dots, M$, т.е. по осям $O\eta$ и $O\zeta$ шаги мелкой сетки h_a и углы раствора КЭ V_e постоянны. На мелкой сетке h_a определяем крупную ортогональную узловую сетку H_a . Узлы сетки H_a на рисунке 2 отмечены точками (64 узла). Для узлов крупной сетки введена целочисленная система координат ijk размерности $n_1 \times n_2 \times n_3$. Для рисунка 2 имеем $n_1 = n_2 = n_3 = 4$, узел $p(i, j, k)$ имеет целочисленные координаты $i = 2$, $j = 4$, $k = 4$.

1.1. Построение полиномов Лагранжа для криволинейных ДвКЭ. Рассмотрим построение в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 2) полиномов Лагранжа, которые строим на крупной сетке H_a и с помощью которых определяем функции перемещений для ДвКЭ V_a . Важно отметить следующее. Функционал W_a полной потенциальной энергии ДвКЭ V_a определяем, используя КЭ первого порядка базового разбиения R_a , т.е. функционал W_a определяем на мелкой сетке h_a . С помощью полиномов Лагранжа (построенных на крупной сетке H_a) узловые перемещения мелкой сетки h_a выражаем через узловые перемещения крупной сетки H_a , т.е. полиномы Лагранжа используем для понижения размерности функционала W_a .

Пусть точка M_0 ДвКЭ V_a имеет декартовы координаты x, y, z и криволинейные координаты ξ, η, ζ . Поскольку оси Oy и $O\eta$ совпадают (см. рис. 2), то $y = \eta$. Для криволинейной координаты ξ точки M_0 имеем $\xi = \alpha R$, где R – радиус цилиндрической поверхности, на которой лежит точка M_0 ; α – угол, отвечающий координате ξ , $0 \leq \alpha \leq \alpha_a$ (см. рис. 2). Поскольку угол α_a мал, то $x \approx \xi$. Принимаем $x = \xi$. Пусть ось $O\zeta^*$ проходит через точку M_0 и совпадает с радиусом внутренней цилиндрической поверхности ДвКЭ V_a . Пусть φ – угол между осями $O\zeta^*$ и Oz , $\varphi \in [-\alpha_a/2, \alpha_a/2]$. Тогда $z = \zeta \cos \varphi$. Поскольку угол α_a мал, то $\cos \varphi \approx 1$, и поэтому считаем, что $z = \zeta$. Итак, декартовы координаты x, y, z и криволинейные координаты ξ, η, ζ связаны соотношениями

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta. \quad (1)$$

Для узла $p(i, j, k)$ крупной сетки H_a ДвКЭ V_a в силу (1) имеем соотношения

$$x_i = \xi_i, \quad y_j = \eta_j, \quad z_k = \zeta_k, \quad (2)$$

где ξ_i, η_j, ζ_k и x_i, y_j, z_k – координаты узла p соответственно в системах координат $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$, $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, $k = 1, \dots, n_3$.

Базисную функцию N_{ijk} узла $p(i, j, k)$ крупной сетки H_a ДвКЭ V_a в декартовой системе координат $Oxyz$ представляем в форме

$$N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z), \quad (3)$$

где $L_i(x)$, $L_j(y)$, $L_k(z)$ – полиномы Лагранжа, имеющие вид [6]

$$L_i(x) = \prod_{n=1, n \neq i}^{n_1} \frac{x - x_n}{x_i - x_n}, \quad L_j(y) = \prod_{n=1, n \neq j}^{n_2} \frac{y - y_n}{y_j - y_n}, \quad L_k(z) = \prod_{n=1, n \neq k}^{n_3} \frac{z - z_n}{z_k - z_n},$$

где x_i, y_j, z_k – координаты узла $p(i, j, k)$.

Для точек с координатами ξ, ξ_i, ξ_n , лежащих на цилиндрической поверхности радиуса R , имеем соотношения $\xi = \alpha R$, $\xi_i = \alpha_i R$, $\xi_n = \alpha_n R$, где $\alpha, \alpha_i, \alpha_n$ – углы, отвечающие соответственно координатам ξ, ξ_i, ξ_n . С учетом, что $x = \xi$, $x_i = \xi_i$, $x_n = \xi_n$, для полинома Лагранжа $L_i(x)$ получаем

$$L_i(x) = \prod_{n=1, n \neq i}^{n_1} \frac{x - x_n}{x_i - x_n} \equiv L_i(\alpha) = \prod_{n=1, n \neq i}^{n_1} \frac{\alpha - \alpha_n}{\alpha_i - \alpha_n}. \quad (4)$$

Следует отметить, что полином Лагранжа $L_i(x)$ по координате x имеет одинаковый вид (4) для точек с координатами ξ, ξ_i, ξ_n , лежащих на цилиндрических поверхностях с любыми радиусами R , причем полином $L_i(x)$, согласно (4), зависит только от угловой координаты α . Подставляя (4) в (3), получим

$$N_{ijk} = L_i(\alpha)L_j(y)L_k(z).$$

Учитывая (2), (4), полиномы Лагранжа, построенные для криволинейной крупной сетки H_a ДвКЭ V_a , представим в виде

$$L_i(\alpha) = \prod_{n=1, n \neq i}^{n_1} \frac{\alpha - \alpha_n}{\alpha_i - \alpha_n}, \quad L_j(y) = \prod_{n=1, n \neq j}^{n_2} \frac{y - \eta_n}{\eta_j - \eta_n}, \quad L_k(z) = \prod_{n=1, n \neq k}^{n_3} \frac{z - \zeta_n}{\zeta_k - \zeta_n}. \quad (5)$$

Функции перемещений u_a, v_a, w_a ДвКЭ V_a запишем в форме

$$u_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} w_{ijk},$$

где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ – значения функций u, v, w для узла $p(i, j, k)$ сетки H_a .

Тройке целых чисел i, j, k узла $p(i, j, k)$ определим целое число β и введем обозначения: $N_\beta = N_{ijk}$, $q_\beta^u = u_{ijk}$, $q_\beta^v = v_{ijk}$, $q_\beta^w = w_{ijk}$, где $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, $k = 1, \dots, n_3$, $\beta = 1, \dots, n_0$; $n_0 = n_1 n_2 n_3$ (на рис. 2 $n_1 = n_2 = n_3 = 4$, $n_0 = 64$). Тогда для функций перемещений u_a , v_a , w_a получаем

$$u_a = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^u, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^v, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^w, \quad (6)$$

где q_β^u , q_β^v , q_β^w , N_β – перемещения и функция формы β -го узла сетки H_a .

1.2. Первая процедура построения криволинейных лагранжевых ДвКЭ. Основные положения первой процедуры рассмотрим на примере построения криволинейного лагранжевого ДвКЭ V_a 3-го порядка (рис. 2). Порядок лагранжевого ДвКЭ равен порядку полиномов Лагранжа (вида (5), см. п. 1.1), построенных на криволинейной крупной сетке ДвКЭ. Пусть для ДвКЭ V_a построены базовое разбиение R_a , крупная сетка H_a и функции перемещений (6) с помощью полиномов Лагранжа. Обозначим через $\delta_a = \{q_1^u, \dots, q_{n_0}^u, q_1^v, \dots, q_{n_0}^v, q_1^w, \dots, q_{n_0}^w\}^T$ вектор узловых перемещений крупной сетки H_a , т.е. узловых перемещений ДвКЭ V_a , отвечающий декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 2). Пусть $[K_e]$ – матрица жесткости, \mathbf{P}_e и δ_e – векторы узловых сил и перемещений КЭ V_e построены в декартовой системе координат $Oxyz$ [4, 5]. Полную потенциальную энергию W_a для базового разбиения R_a ДвКЭ V_a запишем в матричной форме

$$W_a = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (7)$$

где M – общее число КЭ V_e .

Используя (6), узловые перемещения вектора δ_e выражаем через узловые перемещения вектора δ_a . В результате построим равенство

$$\delta_e = [A_e^a] \delta_a, \quad (8)$$

где $[A_e^a]$ – прямоугольная матрица.

Подставляем (8) в функционал (7) и, минимизируя его, получаем

$$[K_a] = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T [K_e] [A_e^a], \quad \mathbf{F}_a = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T \mathbf{P}_e,$$

где $[K_a]$ – матрица жесткости; \mathbf{F}_a – вектор узловых сил лагранжевого ДвКЭ V_a .

1.3. Вторая процедура построения криволинейных лагранжевых ДвКЭ. Вторую процедуру, не теряя общности суждений, рассмотрим на примере построения лагранжевого ДвКЭ V_b 3-го порядка, который имеет размеры, форму и неоднородную структуру и расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, как и лагранжевый ДвКЭ V_a (рис. 2). При построении ДвКЭ V_b используем мелкую h_a и крупную H_a сетки, базовое разбиение R_a и функции перемещений u_a , v_a , w_a ДвКЭ V_a (см. п. 1.2). В данном случае δ_a есть вектор узловых перемещений ДвКЭ V_b . На базовом

разбиении R_a ДвКЭ V_b , используя метод конденсации [6], строим криволинейные суперэлементы G_e^s с характерными размерами $3h_x^e \times 3h_y^e \times 3h_z^e$, которые покрывают всю область ДвКЭ V_b , где $e = 1, \dots, N$, N – общее число суперэлементов (для рис. 2 $N = 27$). При этом вершины суперэлементов совпадают с узлами крупной сетки H_a ДвКЭ V_b . Полную потенциальную энергию W_s суперэлементов G_e^s запишем в виде

$$W_s = \sum_{e=1}^N \left(\frac{1}{2} (\delta_e^s)^T [K_e^s] \delta_e^s - (\delta_e^s)^T \mathbf{P}_e^s \right), \quad (9)$$

где $[K_e^s]$, \mathbf{P}_e^s , δ_e^s – матрица жесткости, векторы узловых сил и перемещений суперэлемента G_e^s , которые определяем в декартовой системе координат $Oxyz$ ДвКЭ V_b .

Используя (6), между векторами δ_e^s , δ_a установим связь

$$\delta_e^s = [A_e^s] \delta_a, \quad (10)$$

где $[A_e^s]$ – прямоугольная матрица; δ_a – вектор узловых неизвестных ДвКЭ V_b .

Подставляем (10) в функционал (9) и, минимизируя его, получаем

$$[K_b] = \sum_{e=1}^N [A_e^s]^T [K_e^s] [A_e^s], \quad \mathbf{F}_b = \sum_{e=1}^N [A_e^s]^T \mathbf{P}_e^s,$$

где $[K_b]$ – матрица жесткости и \mathbf{F}_b – вектор узловых сил лагранжевого ДвКЭ V_b .

Замечание 1. Как показывают расчеты, лагранжевые ДвКЭ V_b (построенные по 2-й процедуре) порождают более точные решения, чем лагранжевые ДвКЭ V_a (построенные по 1-й процедуре). С другой стороны, реализация 2-й процедуры связана с обращением матрицы высокого порядка, что увеличивает временные затраты на построение сеточных решений.

Замечание 2. Криволинейные композитные лагранжевые ДвКЭ n -го порядка (n – целое, $n \geq 1$) с неоднородной и микронеднородной структурой строим по процедурам, которые аналогичны процедурам п. 1.2 и 1.3.

Замечание 3. При построении однородных криволинейных лагранжевых односеточных КЭ n -го порядка, имеющих такую же геометрическую форму, как лагранжевые ДвКЭ (рис. 2), используем функции перемещений вида (6), которые построены с помощью полиномов Лагранжа n -го порядка вида (5).

2. Криволинейные лагранжевые сложные МНКЭ. Основные положения процедуры построения криволинейного сложного композитного многосеточного элемента рассмотрим на примере сложного МНКЭ V_m 3-го порядка, расположенного в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 4). Порядок МНКЭ V_m равен порядку полиномов Лагранжа (вида (5), см. п. 1.1), построенных на криволинейной крупной сетке МНКЭ V_m . Узлы крупной сетки H_m МНКЭ V_m на рисунке 4 отмечены точками (64 узла). Пусть область МНКЭ V_m (рис. 4) представлена криволинейными лагранжевыми ДвКЭ V_n^b 3-го порядка (рис. 5), построенными по алгоритмам п. 1.2 и 1.3. Базовое разбиение ДвКЭ V_n^b , состоящее из КЭ V_e 1-го порядка с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ (см. рис. 1), учитывает неоднородную структуру ДвКЭ V_n^b , т. е. сложного МНКЭ V_m . Двухсеточный КЭ V_n^b расположен в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ с характерными размерами $b_x^n \times b_y^n \times b_z^n$, где $b_x^n = 9h_x^e = \gamma_n R_1^n$, $b_y^n = 9h_y^e$, $b_z^n = 9h_z^e$, R_1^n – радиус нижней поверхности ДвКЭ

V_n^b , γ_n – угол раствора ДвКЭ V_n^b , $h_z^m = 3b_z^n$ – толщина, $h_y^m = 3b_y^n$ – длина МНКЭ V_m , $n = 1, \dots, N$, N – общее число ДвКЭ V_n^b , для рисунка 4 $N=27$. Пусть $b_y^n, b_z^n, \gamma_n = \text{const}$, $n = 1, \dots, N$. Форма сложного МНКЭ V_m есть прямая призма высотой h_y^m . Отметим, что МНКЭ V_m включает некоторое множество криволинейных мелких и крупных вложенных сеток ДвКЭ V_n^b и крупную сетку H_m . Функции перемещений u_m, v_m, w_m , построенные на сетке H_m с помощью полиномов Лагранжа (см. п. 1.1) 3-го порядка, представляем в виде

$$u_m = \sum_{i=1}^{64} N_i^m u_i^m, \quad v_m = \sum_{i=1}^{64} N_i^m v_i^m, \quad w_m = \sum_{i=1}^{64} N_i^m w_i^m, \quad (11)$$

где N_i^m – базисная функция i -го узла сетки H_m ; u_i^m, v_i^m, w_i^m – значения перемещений в i -м узле сетки H_m в декартовой системе координат $Oxyz$.

Пусть δ_m – вектор узловых перемещений (размерности 192) крупной сетки H_m в декартовой системе координат $Oxyz$. Пусть ось $O_1 y_1$ локальной декартовой системы координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ ДвКЭ V_n^b (рис. 5) параллельна оси Oy локальной декартовой системы координат $Oxyz$ МНКЭ V_m (рис. 4), и пусть между осями $O_1 x_1$ и Ox угол равен φ_n .

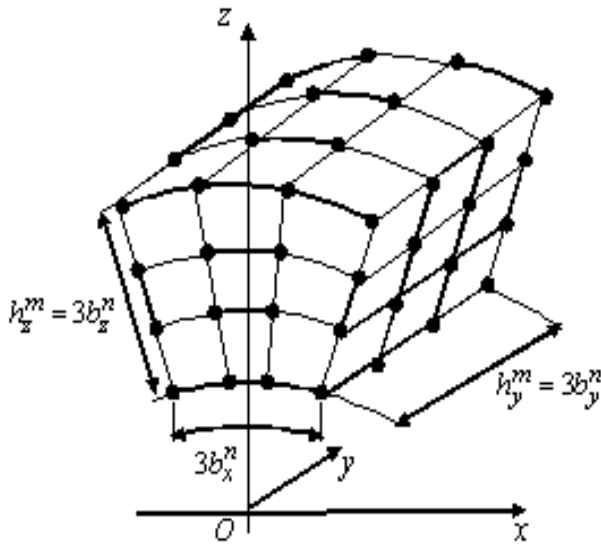


Рис. 4. Сложный МНКЭ V_m

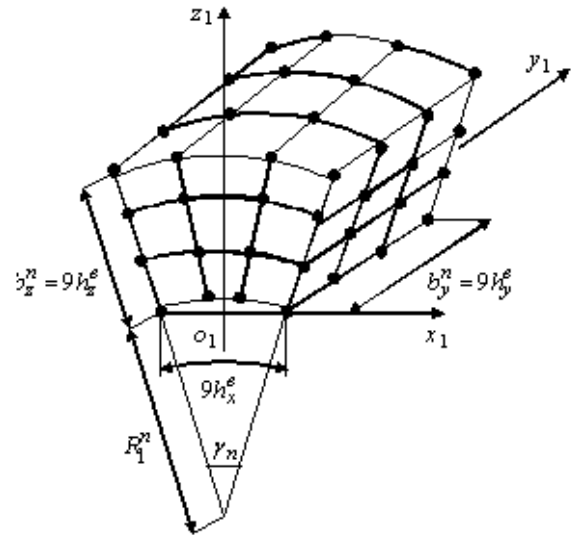


Рис. 5. ДвКЭ V_n^b

Векторы δ_n^1, δ_n^b узловых перемещений лагранжевого ДвКЭ V_n^b , отвечающие соответственно системам координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ и $Oxyz$, представим в виде

$$\delta_n^1 = \{u_1^1, \dots, u_{64}^1, v_1^1, \dots, v_{64}^1, w_1^1, \dots, w_{64}^1\}^T, \quad \delta_n^b = \{u_1^b, \dots, u_{64}^b, v_1^b, \dots, v_{64}^b, w_1^b, \dots, w_{64}^b\}^T.$$

Между векторами δ_n^1, δ_n^b имеем связь

$$\delta_n^1 = [T_n^b] \delta_n^b,$$

где $[T_n^b]$ – матрица вращений размерности 192×192 , которая имеет структуру [6],

$$[T_n^b] = \begin{bmatrix} [M_1][M_0][M_2] \\ [M_0][M_e][M_0] \\ -[M_2][M_0][M_1] \end{bmatrix},$$

здесь подматрицы имеют размерность 64×64 ; $[M_0]$ – нулевая и $[M_e]$ – единичная матрицы, $[M_1] = \cos \varphi_n [M_e]$, $[M_2] = \sin \varphi_n [M_e]$.

Учитывая связь между векторами δ_n^1 , δ_n^b , получаем соотношения [7]

$$[K_n^b] = [T_n^b]^T [K_n^1] [T_n^b], \quad \mathbf{P}_n^b = [T_n^b] \mathbf{P}_n^1,$$

где $[K_n^1]$, $[K_n^b]$ – матрицы жесткости и \mathbf{P}_n^1 ; \mathbf{P}_n^b – векторы узловых сил ДвКЭ V_n^b , отвечающие соответственно декартовым системам координат $O_1x_1y_1z_1$ и $Oxyz$.

Полную потенциальную энергию W_m МнКЭ V_m представим выражением

$$W_m = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} (\delta_n^b)^T [K_n^b] \delta_n^b - (\delta_n^b)^T \mathbf{P}_n^b \right), \quad (12)$$

где N – общее число ДвКЭ V_n^b .

Используя (11), строим равенство

$$\delta_n^b = [A_n^m] \delta_m, \quad (13)$$

где $[A_n^m]$ – квадратная матрица размерности 192×192 .

Подставляем (13) в функционал (12) и, минимизируя его, получим

$$[K_m] = \sum_{n=1}^N [A_n^m]^T [K_n^b] [A_n^m], \quad \mathbf{F}_m = \sum_{n=1}^N [A_n^m]^T \mathbf{P}_n^b,$$

где $[K_m]$, \mathbf{F}_m – матрица жесткости и вектор узловых сил сложного МнКЭ V_m .

Замечание 4. Криволинейные лагранжевые сложные МнКЭ n -го ($n \geq 1$) порядка с неоднородной (микрон неоднородной) структурой строим по процедуре, которая аналогична процедуре п. 2.

3. Результаты расчетов. В качестве модельной задачи рассмотрим расчет композитной консольной прямоугольной в плане панели V_0 волокнистой структуры (рис. 6). Панель V_0 расположена в декартовой системе координат $Oxyz$, при $y = 0$ имеем $u = v = w = 0$, т.е. панель жестко закреплена. Волокна параллельны оси Oy и по сечению панели расположены равномерно. Базовое разбиение \mathbf{R}_0 панели V_0 состоит из однородных элементов V_e 1-го порядка с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ (рис. 1). Разбиение \mathbf{R}_0 учитывает неоднородную структуру панели и порождает криволинейную мелкую сетку h_a . Для узлов мелкой сетки введена целочисленная система координат ijk (рис. 6) размерности $73 \times 145 \times 19$. Двухсеточная модель панели V_0 состоит из лагранжевых ДвКЭ V_n^d 3-го порядка с характерными размерами $18h_x^e \times 18h_y^e \times 18h_z^e$ (рис. 7), которые построены по процедуре п. 1.3 и мелкие сетки которых имеют размерность $19 \times 19 \times 19$,

$n=1, \dots, N_0$, N_0 – общее число ДвКЭ V_n^d . Для панели V_0 $N_0 = 32$. На рисунке 7 узлы крупной сетки H_a ДвКЭ V_n^d отмечены точками (64 узла).

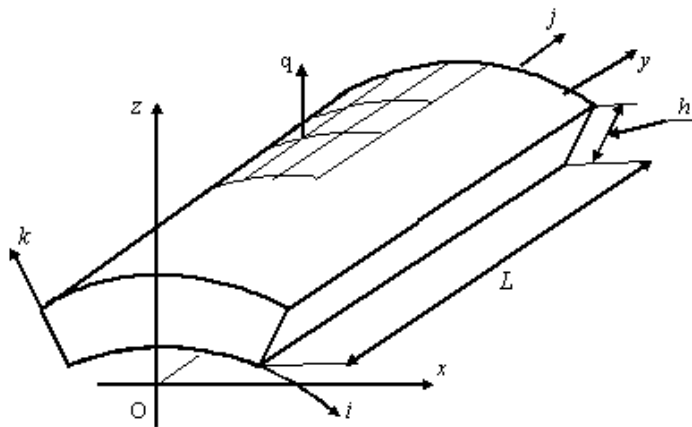


Рис. 6. Панель V_0

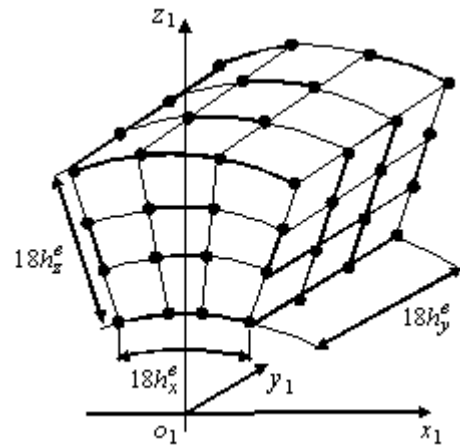


Рис. 7. ДвКЭ V_n^d

Базовые разбиения ДвКЭ V_n^d состоят из КЭ V_e (см. рис. 1). ДвКЭ V_n^d расположен в декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$, причем ось O_1y_1 параллельна оси Oy декартовой системы координат $Oxyz$ панели (рис. 6). Область ДвКЭ V_n^d содержит 27 суперэлементов G_e^s с характерными размерами $6h_x^e \times 6h_y^e \times 6h_z^e$. На рисунке 8 представлено сечение суперэлемента G_e^s в плоскости, перпендикулярной оси O_1y_1 . Сечение представлено сеткой базового разбиения, сечения волокон с характерными размерами $h_x^e \times h_z^e$ заштрихованы. В узлах мелкой сетки с целочисленными координатами i, j, k , где $i = 1 + 6(\alpha - 1)$, $\alpha = 1, \dots, 7$, $j = 73 + 6(\beta - 1)$, $\beta = 1, \dots, 13$, $k = 19$, на панель действуют вертикальные силы $q = 0,1$. На рисунке 6 поверхность панели, на которой задано нагружение, заштрихована. Модуль Юнга связующего материала равен 1, волокна – 10, коэффициент Пуассона для волокна и связующего материала равен 0,3. Радиус внутренней поверхности панели равен 25, радиус внешней поверхности – 30, толщина панели $h = 5$, длина панели $L = 40$ (рис. 6). Угол раствора панели равен $\pi/4$.

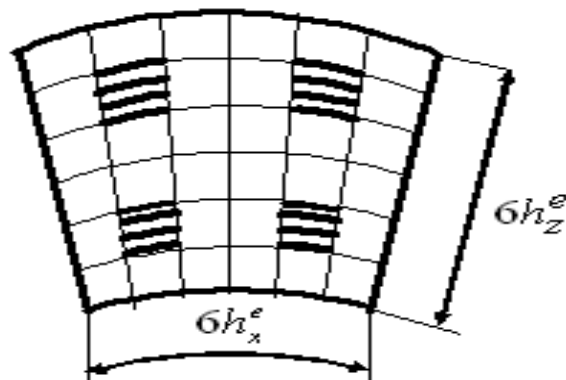


Рис. 8. Сечение суперэлемента G_e^s

Результаты расчетов панели V_0 показывают, что максимальное эквивалентное напряжение (перемещение) двухсеточной дискретной модели \mathbf{R}_h панели V_0 , состоящей из ДвКЭ V_n^d , отличается от максимального эквивалентного напряжения (перемещения) базовой дискретной модели \mathbf{R}_0 на 3,61% (на 2,73%). Размерность базовой модели \mathbf{R}_0 панели V_0 равна 599184, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 8447. Двухсеточная дискретная модель \mathbf{R}_h панели V_0 имеет 3744 узловых неизвестных (т.е. в 160 раз меньше, чем неизвестных в базовой модели \mathbf{R}_0), ширина ленты СУ МКЭ равна 1031 (в 8 раз меньше ширины ленты СУ МКЭ модели \mathbf{R}_0). Реализация МКЭ для двухсеточной модели \mathbf{R}_h требует в 1310 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели \mathbf{R}_0 . Эквивалентные напряжения определяются по 4-й теории прочности.

Заключение. В данной работе показаны процедуры построения криволинейных лагранжевых ДвКЭ и сложных МнКЭ, которые используем для расчета трехмерных упругих композитных цилиндрических панелей и оболочек с различными коэффициентами заполнения. Достоинства предлагаемых элементов состоят в следующем. Лагранжевые ДвКЭ и сложные МнКЭ в панелях и оболочках:

- описывают трехмерное напряженное состояние;
- учитывают неоднородную и микрон неоднородную структуры, порождают двух- и многосеточные дискретные модели, размерности которых в $10^3 \div 10^4$ раз меньше размерностей базовых моделей;
- учитывают сложный характер закрепления.

Отметим, что напряжения можно определить в любом компоненте неоднородных структур панелей и оболочек. Реализация МКЭ для двух- и многосеточных дискретных моделей требует в $10^2 \div 10^3$ раз меньше временных затрат, чем для базовых моделей.

Литература

1. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов / Институт вычислительного моделирования СО РАН. – Красноярск, 2000. – 30 с. – Деп. в ВИНТИ №2990-В00.
2. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // ПМТФ. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
3. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных элементов с неоднородной и микрон неоднородной структурой // Известия АлтГУ. Сер. Математика и механика. – 2014. – 1/1. – С. 80–83.
4. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Двухсеточное моделирование цилиндрических оболочек и панелей переменной толщины // Вестник КрасГАУ. – 2014. – № 4. – С. 90–97.
5. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Одно- и двухсеточные криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек // Известия АлтГУ. Сер. Математика и механика. – 2014. – 1/1. – С. 84–89.
6. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

