УДК 512.54

А.А. Шлепкин, К.Н. Папунидис, И.И. Гончарук, С.В. Карпов, А.В. Федосенко

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ШУНКОВА НАСЫЩЕННЫЕ $GL_2(p^n)$

Авторами статьи исследуется структура бесконечных подгрупп в периодических группах Шункова, насыщенных полными линейными группами размерности два над конечными полями.

***Ключевые слова**: периодические группы Шункова насыщенные, размерность, конечные поля, множество.*

A.A. Shlepkin, K.N. Papunidis, I.I. Goncharuk, S.V. Karpov, A.V. Fedosenko

SHUNKOV'S SATURATED PERIODIC GROUPS $GL_2(p^n)$

The structure of infinite subgroups in Shunkov's period groups saturated with full linear two dimension groups over final fields is researched by the authors of the article.

***Key words**: Shunkov's saturated periodic groups, dimension, final fields, set.*

Введение. Группа G насыщена группами из множества X, если любая конечная подгруппа K и G содержится в подгруппе группы G (возможно совпадающей с K), изоморфной некоторой группе из X [1].

Пусть группа G насыщена множеством $\Re$ и K некоторая подгруппа из G. Через $\Re(K)$ будет обозначено подмножество групп группы $G,$ содержащее подгруппы K и изоморфные группам из $\Re.$ В частности, если 1 – единичная группа, то $\Re(1)$ – это множество всех подгрупп группы $G,$ изоморфных группам из $K.$

В работах [2,3,4] изучались локально конечные группы периодические группы Шункова $X,$ насыщенные множеством $\{GL_2(3^n)\}$. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Доказаны следующие результаты:

Теорема 1. Пусть бесконечная периодическая группа Шункова G насыщена группами из множества $\Im=\{GL_2(q)\},$ где $q=2^n$ и натуральное n не фиксируется. Тогда $G\simeq GL_2(Q),$ где Q – локально конечное поле характеристики 2.

Теорема 2. Пусть G бесконечная, периодическая, не локально конечная группа Шункова, насыщенная множеством $\Im=\{GL_2(p^n)\},$

где $p\neq 2$ фиксированное простое число и натуральное n не фиксируется. Тогда:

1. Силовская $\boldsymbol{p}$ подгруппа S группы G элементарная абелева.
2. Для любых двух силовских $p-$ подгрупп S_1 и S_2 группы G либо $S_1\cap S_2=e, S_1=S_2.$
3. Пусть a элемент порядка p из G и A бесконечная локально конечная подгруппа из G, содержащая $a.$ Тогда в G существует бесконечная силовская $p-$ подгруппа S, содержащая $a.$
4. Если S силовская p подгруппа группы $G,$ то $N_G(S)=S\leftthreetimes(D\times R)$,

где D и R изоморфные локально циклические группы; $S\leftthreetimes D-$ группа Фробениуса с неинвариатным множителем D и ядром S.

5. $N_G(D\times R)=(A\times B)\leftthreetimes\langle\omega\rangle$,

где $\omega^2=e,\quad A^\omega=B, A$ бесконечная локально-циклическая группа.

6. $O_2(Z(K))\subseteq Z(G).$

1. Известные факты и определения

Предложение 1. Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H и G в факторе-группе $N\,\mathrm{a}(H)\,/\,H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [4].

Предложение 2. Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа [5].

Предложение 3. Пусть, где $L = GL_2(q),\ q = 2^n$. Тогда:

1. $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in GF(q) \right\}$ – силовская $2-$подгруппа группы L.

2. $N_L(R) = R \leftthreetimes (Z \times T)$, где $Z = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$ – центр группы $L, T = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, |\alpha| = q - 1.$

3. $R-$ абелева группа периода p и $R \subset SL_2(2^n)$.

4. $C_L(R) = (R \times Z)$.

5. $N_L(Z \times T) = Z \times T \leftthreetimes \langle \omega \rangle$, где $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Все силовские $2-$ подгруппы группы L сопряжены и пересекаются тривиально.

7. Пусть М $= \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = k > 2$ подгруппы L. Тогда K делит $q-1$ и для некоторого $g \in L\ \ M^q \subset (Z \times T)$ и $N_L(M) = N_L(Z \times T)$.

8. $L = L\ (2^n) \times Z.$

Предложение 4. Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n$>2 и $P-$силовская 2 – подгруппа группы $G.$

Тогда:

1. $P-$элементарная абелева группа и любые две различные силовские 2 – подгруппы группы G пересекаются тривиально.

2. $G_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.

3. $N_G(P) = P \leftthreetimes H$ максимальная подгруппа в G , являющаяся группой Фробениуса с ядром P и циклическим дополнением H порядка $q-1,$ действующим транзитивно на множестве.

4. $N_G(H)-$ группа диэдра порядка $2(q-1).$

5. Если $K-$подгруппа в G и $K-$обладает нетривиальной нормальной подгруппой нечетного порядка, то $N_G(K)-$группа диэдра порядка $2(q-1)$ или $2(q+1)$ [6].

Предложение 5. Пусть где $L = GL_2(q),\ q = p^n$ и $p-$нечетно. Тогда:

1. $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in GF(q) \right\}$ – силовская $p-$ подгруппа группы L.

2. $N_L(R) = R \leftthreetimes (Z \times T)$, где $Z = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$ – центр группы $L, T = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, |\alpha| = q - 1.$

3. $R-$ абелева группа периода p и $R \subset SL_2(p^n)$.

4. $C_L(R) = (R \times Z)$.

5. $N_L(Z \times T) = Z \times T \leftthreetimes \langle \omega \rangle$, где $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Все силовские $p-$ подгруппы группы L – сопряжены и пересекаются тривиально.

7. Пусть $M=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$, где $|a|=|b|=k>2$ подгруппы L. Тогда k делит $q-1$ и для некоторого $g\in L$ $M^g\subset(Z\times T)$ и $N_L(M)=N_L(Z\times T)$.

8. $L=SL_2(p^n)\rightthreetimes T,$ где $T=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $\alpha\in GF(p^k)$.

9. Если $q=-1(\mathrm{mod}\,4)$, то

$$L=(SL_2(q)\cdot Z)\rightthreetimes\langle\omega\rangle.$$

10. Если $q=1(\mathrm{mod}\,4)$, то $L/Z(L)=L_2\ \ p^n\ \rightthreetimes\langle\bar\upsilon\rangle$, где $\bar\upsilon-$ инволюция, являющаяся образом элемента

$$\upsilon=\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

при гомоморфизме $L\to L/Z(L)$ и h элемент поля $GF(p^n)$ из которого не извлекается корень квадратный.

11. Если $q\equiv1(\mathrm{mod}\,4), 2^s-2$ часть числа $q-1,\xi-$ примитивный корень степени 2^s из 1 в $GF(q),$ то силовская 2 – подгруппа S – порядка 2^{s+1} – является сплетением групп Z_{2^s} и $Z_2S=\left\langle\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle$.

12. Если $q\equiv-1(\mathrm{mod}\,4), 2^s-2$ часть числа $q+1,\xi-$ примитивный корень степени 2^{s+1} из 1 в $GF(q^2)$, то силовская 2 – подгруппа $S-$ является полудиэдральной группой порядка 2^{s+2} и $S=\left\langle\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \xi+\xi^q\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle$ [6].

Предложение 6. Бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой [7].

Предложение 7. В группе Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка существует бесконечная локально конечная подгруппа [8].

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое непустое множество неизоморфных циклических групп нечетного порядка, а $\mathfrak{M}$ —некоторое непустое множество неизоморфных групп $L_2(2^m)$. Положим $\mathfrak{X}=\ \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\ \mathbf{X}\in\mathfrak{M},\mathbf{Y}\in\mathfrak{N}$. Таким образом, множество $\mathfrak{X}$ состоит из набора конечных групп, каждый из которых является прямым произведением двух групп X и $Y,$ где группа X берется из множества $\mathfrak{M}$, а группа Y – из множества $\mathfrak{N}$.

Предложение 8. Периодическая группа Шункова $G,$ насыщенная группами из множества $\mathfrak{X}$, локально конечна и изоморфна прямому произведению $L\times V$, где $L\simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики два, а V – локально циклическая группа без инволюций [9].

Предложение 9. Группа $L_2(q)$, где $q=p^n$ – степень простого числа p имеет следующие подгруппы:

1) $q+1$ сопряженных абелевых элементарных подгрупп порядка q;

2) $(q\pm1)/2$ сопряженных циклических подгрупп порядка $\dfrac{(q\pm1)}{2;1}$, 2 и 1 берутся в знаменателе согласно $p>2$ и $p=2$; $Z(G)$;

3) $q(q \pm 1)/2$ сопряженных циклических подгрупп порядка $q_{\mp}, q_{\mp}$ делит $\frac{q-1}{2;1}$;

4) $M(q)/2d_{\mp}$ сопряженных групп диэдра порядка $2d_{\mp}$, где $d_{\mp}$ – нечетное число и $M(q) = q(q^2-1)$ для $p = 2$ и $M(q) = q(q^2-1)/2$ для $p > 2$;

5) две системы, каждая из $M(q)/4d \mp$ сопряженных групп диэдра порядка $2d_{\mp}$, где $d_{\mp}$ – нечетное число, большее 2;

6) для $p^n = 8h \pm 3$ одно множество из $M(q)/12$ сопряженных нециклических подгрупп порядка 4;

7) $\frac{(p^n-1)(p^n-p)...(p^n-p^{m-1})}{(p^m-1)(p^m-p)(p^m-p^{m-1})}$ множеств, каждое из $\frac{p^{2n}-1}{(2,1;1)(p^k-1)}$ сопряженных коммутативных групп порядка $\boldsymbol{p^m}$, где $(2,1;1)$ означает 2,1 или 1 согласно одному из случаев: $p > 2$ и четное число, $p > 2$ и $n/k -$ нечетное число; или $p = 2$ и n/k – целое число; k – делитель m, зависящий от свойств группы порядка p^m;

8) множество из $\frac{(p^n-1)p^{n-m}}{(2,1;1)(p^k-1)}$ сопряженных групп Фробениуса порядка $p^m d$, где k и d_{-} зависят от m;

9) (2,1;1) множеств, каждое из $M(q)/(2,1;1)M(p^k)$ сопряженных подгрупп, изоморфных $PSL(2, p^k), k -$ делитель n;

10) две системы, каждая из $M(q)/2M(p^k)$ сопряженных подгрупп, изоморфных $PGL(2, p^k)$ – $p > 2$, $n/k -$ четное число;

11) для $q = 8h \pm 1$ два множества, каждое из $M(q)/24$ сопряженных подгрупп S_4;

12) для $q = 8h \pm 1$ два множества, каждое из $M(q)/24$ сопряженных подгрупп A_4;

13) для $q = 8h \pm 3$ или $q = 2^n, n -$ четное число, $M(q)/12$ сопряженных подгрупп A_4;

14) для $q = 10l \pm 1$ две системы, каждая из $M(q)/60$ сопряженных подгрупп A_5 [6].

Предложение 10. Локально конечная группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{I}$, изоморфна $GL_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P.

2. Доказательство теоремы 1

В этом случае $GL_2(q) = L_2(2^n) \times Z(GL_2(2^n))$, $\left|Z(GL_2(2^n))\right| = 2^n - 1$ нечетное число и $Z(GL_2(2^n)) -$ циклическая группа нечетного порядка (предложение 3). По предложению 12 $G = L \times V$, где V – локально циклическая группа без инволюций, а $L \simeq L_2(Q)$ локально конечное поле характеристики 2. Следовательно, $G -$ локально конечна и по предложению 11 $G \simeq GL_2(Q)$ где $Q -$ локально конечное поле характеристики 2.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. Пусть $S -$ силовская $p -$ подгруппа группы G. Тогда S – абелева группа периода p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условиям теоремы любой элемент $s \neq e$ из S содержится в некоторой конечной группе $L \in \Im(\langle s \rangle)$. Так как s лежит в некоторой силовской $p-$ подгруппе группы L, то $|s| = p$. В силу произвольности выбора s из S заключаем, что $S-$ группа периода p. Для любых неединичных элементов $x, y \in S$ группа $\langle x, x^y \rangle$ является конечной $p-$группой (предложение 2). В силу условия насыщенности

$$\langle x, x^y \rangle \subseteq L_1 \leq \Im(\langle x, x^y \rangle)$$

и, следовательно, $L_1 \simeq GL_2(p^n)$. Поскольку $\langle x, x^y \rangle$ $p-$группа, то она лежит в некоторой силовской $p-$ подгруппе S_1 группы $L_1 g$. По предложению 4 S_1 элементарная абелева группа, а значит, элементы x и x^y перестановочны. В силу произвольности выбора x, y как элементов группы S получаем, что

$$\langle x, x^y, x^{y^2}, \dots x^{y^{p-1}} \rangle$$

абелева $p-$ подгруппа группы S. Так как

$$\langle x, x^y, x^{y^2}, \dots x^{y^{p-1}} \rangle^y \langle x^y, x^{y^2} \dots x^{y^{p-1}}, x \rangle,$$

то

$$y \in N_S \ \langle x, x^y, \dots x^{y^{p-1}} \rangle$$

и

$$\langle x, x^y, \dots x^{y^{p-1}}, y \rangle$$

конечная $p-$ группа. По условию насыщенности

$$\langle x, x^y, \dots x^{y^{p-1}}, y \rangle \subseteq L_2 \in \Im(\langle x, x^y, \dots x^{y^{p-1}}, y \rangle),$$

поскольку

$$\langle x, x^y, \dots x^{y^{p-1}}, y \rangle$$

$p-$группа, то она лежит в некоторой силовской $p-$подгруппе S_2 группы L_2. По предложению 5, S_2- абелева группа, а значит элементы x и y перестановочны. В силу произвольности выбора элементов x, y из S получаем, что S абелева группа. Лемма доказана.

Лемма 2. Силовские $p-$подгруппы группы G – имеют тривиальные пересечения.

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Предположим противное и пусть $S, U-$две силовские $p-$ подгруппы группы G, $T = S \cap U \neq 1$. Пусть $x \in S, y \in U$. Для любого $e \neq t \in T$ группа $\langle x, x^y \rangle / \langle t \rangle-$конечна (предложение 2), тогда $\langle t, x, x^y \rangle-$конечная абелева $p-$ группа по предложению 5. Следовательно, конечной будет и группа $\left\langle t, x, x^{y}, \ldots x^{y^{p-1}} \right\rangle,$ более того, в силу вложимости в силовскую $p-$подгруппу, она будет абелевой $p-$ группой. Тогда и группа $\left\langle t, x, x^{y} x^{y^{p-1}} \right\rangle \leftthreetimes \langle y \rangle$ является конечной $p-$ группой и, следовательно, содержится в некоторой силовской $p-$ подгруппе группы $L \in \Im(\langle t, x, y \rangle)$. Но тогда $\langle t, x, y \rangle$ – абелева группа и $xy = yx.$ В силу произвольности выбора элементов x и y получаем, что $SU-$ снова силовская $p-$подгруппа, а значит, $S = U.$ Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть a элемент порядка p из G и A бесконечная локально конечная подгруппа из $G,$ содержащая a . Тогда в G существует бесконечная силовская p – подгруппа $S,$ содержащая a .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S_a силовская p подгруппа из $A,$ содержащая элемент $a.$ Если S_a бесконечная группа, то все доказано. Пусть S_a конечная группа. Так как A бесконечная группа, то мы можем выбрать в A цепочку конечных групп

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots$$

Рассмотрим в G цепочку вложенных друг в друга конечных подгрупп

$$\langle S_a, K_1 \rangle \subset \langle S_a, K_2 \rangle \subset \ldots, \subset \langle S_a, K_i \rangle \subset \ldots$$

По условию насыщенности $\langle S_a, K_i \rangle \subset G_i \subset G$ и $G_i \simeq GL_2(p^{n_i})$. Так как $\left|\langle S_a, K_i \rangle\right|$ неограниченно возрастают, то и $\left|G_i\right| \simeq GL_2(p^{n_i})\big|$ также неограниченно возрастают. Следовательно, неограниченно возрастают и $\left|S_{a,i}\right|$, где $S_{a,i}$ – силовская $p-$подгруппа из $G_i g,$ содержащая элемент $a.$ Последнее означает, что $S_{a,i}$ образует цепочку вложенных друг в друга подгрупп (лемма 2).

$$S_{a,i} \subset S_{a,2} \subset \ldots \subset S_{q,i} \subset \ldots$$

объединение которых

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{a,i} \quad .$$

Бесконечная абелева $p-$ подгруппа в $G.$ Без ограничения общности можно считать S силовской $p-$ подгруппой в $G.$ Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть S конечная силовская $p-$ подгруппа группы G и $e \neq a \in S.$ Тогда:

1. $\Im$ ($\langle a \rangle$) бесконечное множество.

2. $\Im(\langle a \rangle) = \bigcup_{i=1}^{m} \Im_i$, где для любых двух и $X, Y \in \Im_i,$ $X \bigcap Y = N_X(S^{(i)}) = N_Y(S^{(i)}).$ Здесь $S^{(i)}$ силовская $p-$ подгруппа для любого $Z \in \Im_i$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем вначале, что $\Im$ ($\langle a \rangle$) бесконечное множество. Предположим противное. Тогда множество

$$\mathfrak{M}=\{\ \langle a,a^g\rangle\ |\ g\in G\}$$

также конечно и $|G:N_G(\ \langle a\rangle\ )|\ \langle\infty$. Следовательно (лемма Дицмана), $N_G(\ \langle a\rangle\ )$ бесконечная группа. По предложению 6 $N_G(\langle a\rangle)$ содержит локально конечную B. Очевидно $B\ \langle a\rangle$ – бесконечная локально конечная группа в Gg, тогда $\langle a\rangle$ лежит в бесконечной силовской $p-$ подгруппе (лемма 3), что невозможно. Итак, $\mathfrak{I}\ (\ \langle a\rangle\ )$ бесконечно. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_1=\{\ S_{a,X}\ |\ X\in\mathfrak{I}\ \}$$

всех $p-$ подгрупп группы G, таких, что $a\in S_{a,X}$ и $S_{a,X}\in SylpX$. Покажем, что $\mathfrak{M}_1-$ конечное множество. Действительно, в противном случае $N_G(<a>)$ бесконечная группа, что невозможно. Итак, $\mathfrak{M}_1-$ конечное множество. Рассмотрим множество.

$$\mathfrak{M}_2=\{N_X(S_{a,X})\,|\,S_{a,X}\in\mathfrak{M}_1\ X\in\mathfrak{I}\ (\ \langle a\rangle\ )$$

всех нормализаторов силовских $p-$подгрупп групп из $\mathfrak{I}\ (\ \langle a\rangle\ )$. Покажем, что $\mathfrak{M}_2-$ конечное множество. Действительно, в противном случае, $N_G(S_{a,x})-$бесконечная группа для некоторой $S_{a,X}$, а так как $S_{a,X}$ конечная группа, содержащая элемент a, то $N_G(\ \langle a\rangle\ )$ также бесконечная группа. Этот случай, как показано выше, невозможен. Таким образом, $\mathfrak{M}_2-$ конечное множество. Положим $\mathfrak{M}_2=\{N_1,...N_m\}$

$$\mathfrak{I}_i=\{X\ |\ X\in\mathfrak{I}(\langle a\rangle)\ \ N_X(S_a)=N_i\quad .$$

Тогда $\mathfrak{I}\ (\ \langle a\rangle\ )=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\ \mathfrak{I}_i\ (\ \langle a\rangle\ )$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если G содержит конечную силовскую $p-$подгруппу, то бесконечная в группе G существует подгруппа вида $(A\times B)\leftthreetimes\langle\upsilon\rangle$, где $A-$локально циклическая группа, $A^{\upsilon}=B,$ и $\upsilon^2=e.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\mathfrak{I}_i$ из леммы 4 такую, что $|\mathfrak{I}_i\ |=\infty$. В силу конечности $\mathfrak{M}_2$ и бесконечности $\mathfrak{I}\ (\ \langle a\rangle\ )$ это можно сделать. По предложению 5 для любого $X\in\mathfrak{I}_i$:

$$N_X(S_{a,X})=N_i=S_{a,X}\leftthreetimes(D_X\times R_X),$$

где D_X и R_X соответствуют D и R из предложения 5. Рассмотрим $N_G(D_{a,x}\times R_{a,x})=M.$ Поскольку для любого $X\in\mathfrak{I}$,

$$N_X(D_{a,x}\times R_{a,x})=(D_{a,x}\times R_{a,x})\leftthreetimes\langle\omega_x\rangle\ ,$$

где ω_x соответствует инволюция ω из предложения 5 и число таких инволюций бесконечно (в противном случае $\mathfrak{I}_i$ конечное множество, что не так), то M бесконечная группа, удовлетворяющая предложению 1. Следовательно, $M=(A\times B)\leftthreetimes\langle\upsilon\rangle$, где $A-$ локально циклическая группа $A^{\omega}=B$ и $\omega^2=e$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть S бесконечно силовская $p-$подгруппа группы G. Тогда $G_G(S)=S\times D,$ где $D-$ бесконечная локально циклическая группа и $\pi(D)\cap\pi(S)=\varnothing.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a-$ элемент простого порядка $q\neq p$ из $C_G(S)$, $b-$произвольный элемент из $C_G(S)$. Тогда группа $\langle s_1,a,a^b\rangle$ является конечной подгруппой и содержится в некоторой конечной подгруппе $L_2\in\Im\,(\langle S_1,a,a^b\rangle)$, причем $\langle a,a^b\rangle$ содержится в централизаторе некоторой силовской $p-$подгруппы группы L_1. Следовательно, по предложению 5 $\langle a,a^b\rangle$ – циклическая группа порядка p, т.е. $\langle a\rangle=\langle a^b\rangle=\langle a,a^b\rangle$ и $b\in N_G(\langle a\rangle)$. Тогда мы можем рассмотреть конечную подгруппу $\langle a,b\rangle=\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle$ группы $C_G(S).$ Пусть S_1 – конечная подгруппа из S. По предложению 5 $a\in Z(L_2)$. Таким образом, все элементы простого порядка $q\neq p$ из $C_G(S)$ перестановочны, лежат в $Z(C_G(S))$ и порождают локально циклическую группу.

Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что для всех $a\in C_G(S)\setminus S$, таких, что $|a|<m,(m,p)$ группа $\langle a,b\rangle-$циклическая подгруппа в $Z(C_G(S))$ (индуктивное предположение). Пусть теперь a и b – два элемента из $C_G(S)$ и $|a|=p^{\sigma}k_1=m,$ где $p\neq q-$простое число. Докажем, что $\langle a,b\rangle-$ циклическая. Определим элемент a_1 следующим образом: $a_1=a^p$ т.е. $|a_1|=a^{\alpha-1}k_1,b$. Тогда, как следует из индуктивного предположения, $\langle a_1b\rangle\lhd\langle a,b\rangle$. Рассмотрим фактор-группу $\langle\overline{ab}\rangle=\langle a,b\rangle/\langle a,b\rangle$. В этой группе $|a|=|a\langle a_1,b\rangle=p-$простое число. Тогда $\langle\bar{a},a^{\bar{b}}\rangle$ конечная группа по предложению 2. Следовательно, конечной будет и группа $\langle a_1,b\rangle$. По условиям теоремы конечная группа $\langle a,a^bS_1\rangle$ (здесь S_1 конечная подгруппа из S) вкладывается в централизатор силовской $\boldsymbol{p}-$подгруппы некоторой $L\in\Im(\langle a,a^b,S_1\rangle)$ конечной группы. Но тогда $\langle a,a^b\rangle$ циклическая группа и $\langle a\rangle=\langle a^b\rangle=\langle a,a^b\rangle$ и $b\in N_G(\langle a\rangle)$. Тогда мы можем рассмотреть конечную подгруппу $\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle$ группы $C_G(S).$ По предложению 5 она циклическая, т.е. $ab=ba.$ Но тогда группа $\langle a,b\rangle$ конечна. По условиям теоремы конечная группа $\langle a,b,S_1\rangle$ (здесь S_1- снова конечная подгруппа из S) вкладывается в централизатор силовской $p-$ подгруппы некоторой конечной группы $L\in\Im(\langle a,b,S_1\rangle).$ Но тогда $\langle a,b\rangle-$ циклическая группа. В силу произвольности выбора элементов a и b из $C_G(S)\setminus S$ заключаем, что все $p'-$ элементы из $C_G(S)$ порождают локально циклическую группу D и $C_G(S)=S\times D.$

Лемма 7. $N_G(S)=C_G(S)\leftthreetimes R,$ где $R-$ локально циклическая группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим фактор-группу $\overline{N}=N_G(S)/S.$ Очевидно, что $\overline{N}-$ группа, не содержащая элементов порядка $p.$ Возьмем элемент $b\in N_G(S)\setminus C_G(S)$ простого порядка $q\neq p,$ произвольный элемент $x\in N_G(S)\setminus C_G(S).$ Тогда $L_x=\langle b,b^x\rangle-$ конечная группа, $L_x\cdot C_G(S)-$ локально конечная группа. Пусть C^*- конечная подгруппа из $C_G(S),$ такая, что $C^*\cap S\neq e,C^*\not\subset S,$ Тогда группа $L_x^*=\langle b,b^xC^*\rangle$ вложима в некоторую конечную простую неабелеву подгруппу $M_1\in\Im(\langle b,b^x,C^*\rangle$ группы. Обозначим через S_1 силовскую $p-$ подгруппу группы M_1. Из предложения 5 и леммы 2 следует, что $S_1\subset S$. Тогда из способа выбора элементов b и x вытекает, что b, $b^x\in N_{M1}(S_1)\setminus C_{M_1}(S_1)$ и $\langle c\cdot u\rangle=\langle b_x\rangle$ для некоторого $c\in C_{M_1}(S_1)$. Это значит, что $C_G(S)\leftthreetimes\langle b\rangle\leftthreetimes\langle x\rangle-$ группа и, более того, по предложению 2 это локально конечная группа. Последнее означает, что группа $\langle b,x\rangle$ конечна. Теперь повторим рассуждения для конечной группы $L=\langle b,x,C^*\rangle$, вложимой в некоторую конечную простую неабелеву подгруппу $M_2 \in \Im(\langle b,x,C^*\rangle)$ группы G. Обозначим через S_2 силовскую $p-$ подгруппу группы M_2. Из предложения 5 и леммы 2 следует, что $S_2 \subset S$. Тогда из способа выбора элементов b и x вытекает, что $b,x \in N_{M_1}(S_2) \setminus C_{M_2}(S_2)$, более того, $b^{\nu}x^{\omega} \in \langle h\rangle$ для некоторых $\nu,\omega \in C_{M_2}(S_2)$, где $\langle h\rangle -$ группа $N_{M_2}(S_2) = C_{M_2}(S_2) \leftthreetimes \langle h\rangle$. Положим $\bar{x} = xC_G(S) \in \bar{N}, \bar{b} = bC_G(S) \in \bar{N}$. Тогда получаем, что $\bar{b},\bar{x} \in \langle h\rangle$. Итак, мы доказали, что элемент простого порядка и элемент произвольного порядка из $\bar{N}$ порождают циклическую группу.

Пусть теперь $b-$элемент непростого порядка из $N = N_G(S)\setminus C_G(S)$, $x \in N_G(S)\setminus C_G(S) -$ произвольный элемент и $p<|b|-$ некоторое простое число. Обозначим $b_1 = b^p$. Пусть $\langle b_1, x\rangle -$конечная группа (индуктивное предположение). Тогда, рассуждая как выше, получаем, что $(C_G(S)\leftthreetimes\langle b_1\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle -$ локально конечная группа и $\langle c\cdot b_1\rangle = \langle b_1^x\rangle$ для некоторого $c \in S.$ Далее,

$$\left\langle b_{10}^{xc^{-1}}\right\rangle = \langle b_1\rangle,$$

$$xc^{-1} \in N_G(\langle b_1\rangle), b \in N_G(\langle b_1\rangle).$$

Рассмотрим фактор-группу $N_G(\langle b_1\rangle)/\langle b_1\rangle.$ Тогда по доказанному выше подгруппа из этой фактор-группы $\left\langle \bar{b},\overline{b^{xc^{-1}}}\right\rangle$ конечна (как группа Шункова). Следовательно, конечной будет и группа $\left\langle \bar{b},\overline{b^{xc^{-1}}}\right\rangle$, лежащая в $N_G(S)$.

Пусть теперь к A и выше, $C^* -$ конечная подгруппа из $C_G(S)$ такая, что $C^* \cap S \neq 1, C^* \not\subseteq S.$ Тогда группа $L_x^* = \left\langle b, b^{xc^{-1}}, C^*\right\rangle$ вложима в некоторую конечную простую неабелеву подгруппу $M_p \in \Im(\left\langle b,b^{xc^{-1}},C^*\right\rangle$ группы $G.$ Обозначим через S_p силовскую $p-$ подгруппу группы M_p. Из предложения 5 и леммы 2 следует, что $S_p \subset S.$ Тогда из способа выбора элементов b,c и x вытекает, что $b,b^{xc^{-1}} \in N_{M_p}(S_{p)} \setminus C_{M_p}(S_{p)}$ и $\langle c_1\cdot b\rangle = b^{xc^{-1}}$ для некоторого $c_1 \in S_p.$ Это значит, что $C_G(S)\leftthreetimes\langle b\rangle\leftthreetimes\langle x\rangle -$локально конечная группа. Последнее означает, что группа $\langle b, x\rangle$ конечна.

В силу произвольности $x \in N_G(S)\setminus C_G(S)$ получаем, что $\bar{N} -$ локально циклическая группа. Тогда по предложению 2 $N_{(G)}(S)$ локально конечная группа. Теперь, используя результат предыдущей леммы, получаем $N_G(S) = (S\times D)\leftthreetimes R,$ где $R-$ локально циклическая группа. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть группа G содержит бесконечную силовскую $p-$ подгруппу S. Тогда $G(L_2)$ содержит подгруппу $(A\times B)\leftthreetimes\langle\omega\rangle$, где $A^{\omega} = B, \omega^2 = e$ и $A-$локально циклическая группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа D из леммы 8 локально циклическая, следовательно, счетна:

$$D = \{d_1, d_2, ...d_i, ...\}. \tag{1}$$

Пусть $s-$ неединичный элемент из S. Очевидно, что $\langle s,d_1\rangle \subset L_1 \in \Im(\langle s,d_1\rangle, g)$. Обозначим через S_1 силовскую $p-$ подгруппу группы L_1, содержащую элемент s, и рассмотрим $N_{L_1}(S_1)$. По предложению 5

$$N_L(S_1) = (S_1 \times D_1) \rightthreetimes R_1,$$

где D_1 и R_1 – циклические группы из предложения 5. Ясно, что $D_1 \times R_1$ лежит $N_G(S)$.

Пусть теперь d_i – следующий в последовательности (1) элемент с таким свойством, что $d_i \in D \setminus D_1, d_i \neq d_1$. Рассмотрим конечную подгруппу $X = \langle S_1, D_1, d_i, R_1 \rangle$. По условию насыщенности $X \subseteq L_2 \in \Im(X)$ и $L_2 \simeq GL_2(p^{n_2})$. Обозначим через S_2 силовскую $p-$ подгруппу группы L_2, содержащую группу S_1. По предложению 5

$$N_{L_2}(S_2) = (S_2 \times D_2) \rightthreetimes R_2,$$

где D_2 и R_2 – циклические группы из предложения 5. Кроме того, $D_1 \subset D_2 \subset D$ и $R_1 \subset R_2 \subset R$ по построению.

Действуя таким образом по всем i из (1), получим следующие цепочки вложенных групп:

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_i < \ldots,$$

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_i < \ldots,$$

$$R_1 < R_2 < \ldots R_i < \ldots,$$

и как следствие цепочку

$$N_{L_1}(S_1) < N_{L_2}(S_2) < \cdots < N_{L_i}(S_i) < \cdots,$$

которой соответствует последовательность групп

$$L_1, L_2, \ldots L_i, \ldots,$$

изоморфных группам $GL_2(p^{n_{1_1}})$.

По построению, что $D = U^{\infty}{}_{i=n} D_i$ – группа из леммы.

Обозначим

$$S = \bigcup_{i=n}^{\infty} S_i$$

$$R = \bigcup_{i=t}^{\infty} R_i$$

$$N = \bigcup_{i=t}^{\infty} N_{L_i}(S_i) = (S \times R) \rightthreetimes R.$$

Пусть $t_i \in L_i, t_2 = 1$ и элементу t_i соответствует матрица ω из предложения 5 при изоморфизме $L_i \simeq GL_2(p^{n_{i_i}})$. Так как $t_i \in N(D \times R)$, то $(D \times R) \leftthreetimes \langle t_i \rangle$ – подгруппа в G. Положим, что $t_i = \omega, A = R, B = R^{\omega}$. Тогда $(A \times B) \leftthreetimes \langle \omega \rangle$ требуемая группа. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пункт 1 доказан в лемме 1. Пункт 2 доказан в лемме 2. Пункт 3 доказан в лемме 3. Пункт 4 доказан в леммах 4,8,9. Пункт 5 доказан лемме 5, для случая когда в G есть конечные силовские p – подгруппы и в лемме 10, когда в G есть бесконечная силовская $p-$ подгруппа. Пункт 6 доказан в леммах 6–7. Теорема доказана.

Литература

1. *Шлепкин А.К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. – Красноярск, 1993. – С. 363.
2. *Панюшкин Д.Н.* Группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями различных групп: дис. … канд. физ.-мат. наук. – Красноярск, 2010. – 66 с.
3. *Shlyopkin A.A.* Periodic groups saturated by the groups $GL_2(3^n)$ // Book of abstracts of the international conference on algebra. – Kyiv, 2012. – P. 144.
4. *Шлепкин А.А.* Группы насыщенные $GL_2(q)$ // Вестн. СибГАУ. – 2013. – № 1. – С. 100–108.
5. *Шунков В.П.* Об одном классе групп // Алгебра и логика. – 1970. – № 9. – С. 484–496.
6. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1977.
7. *Dickson L.* Linear groups – Leipzig B.C. – Neubner, 1901.
8. *Каргаполов М.* О проблеме О.Ю. Шмидта // Сиб. мат. журн. – 1963. – Т. 4. – № 1. – С. 232–235.
9. *Шлепкин А.К.* Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Красноярск 1998. – 163 с.
10. *Шлепкин А.А., Дуж А.А.* О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп // Владикавказ. мат. журн. – 2012. – Вып. 2. – С. 123–126.