МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 630.377.4

В.Ф. Полетайкин, И.А. Гончаров

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ “ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ – ГРУЗ” ПОВОРОТНОГО ЛЕСОПОГРУЗЧИКА В РЕЖИМЕ ПОДТЯГИВАНИЯ ГРУЗА

Статья посвящена разработке математических моделей системы “технологическое оборудование – груз” телескопического манипулятора поворотного лесопогрузчика в режиме подтягивания груза.

***Ключевые слова**: лесопогрузчики поворотные, манипулятор, математические модели.*

V.F. Poletaykin, I.A. Goncharov

MATHEMATICAL MODEL DEVELOPMENT OF “TECHNOLOGICAL EQUIPMENT-FREIGHT” SYSTEM OF THE ROTARY LOGGER IN THE FREIGHT PULLING UP MODE

The article is devoted to the mathematical model development of "technological equipment – freight" system of the rotary logger telescopic manipulator in the freight pulling up mode.

Key words: rotary loggers, manipulator, mathematical models.

Введение. В связи с тем, что переместительные операции занимают ведущее место в технологии лесной и деревообрабатывающей промышленности, вопросы эффективного использования манипуляторов приобретают особую значимость. Практика ведения лесозаготовок в России и за рубежом показала, что лесосечные машины манипуляторного типа останутся в ближайшем будущем основными машинами, поэтому совершенствование и создание новых машин такого типа весьма актуально [1–5].

Цель исследований. Разработать математические модели системы “технологическое оборудование – груз” для поворотного лесопогрузчика в режиме подтягивания груза.

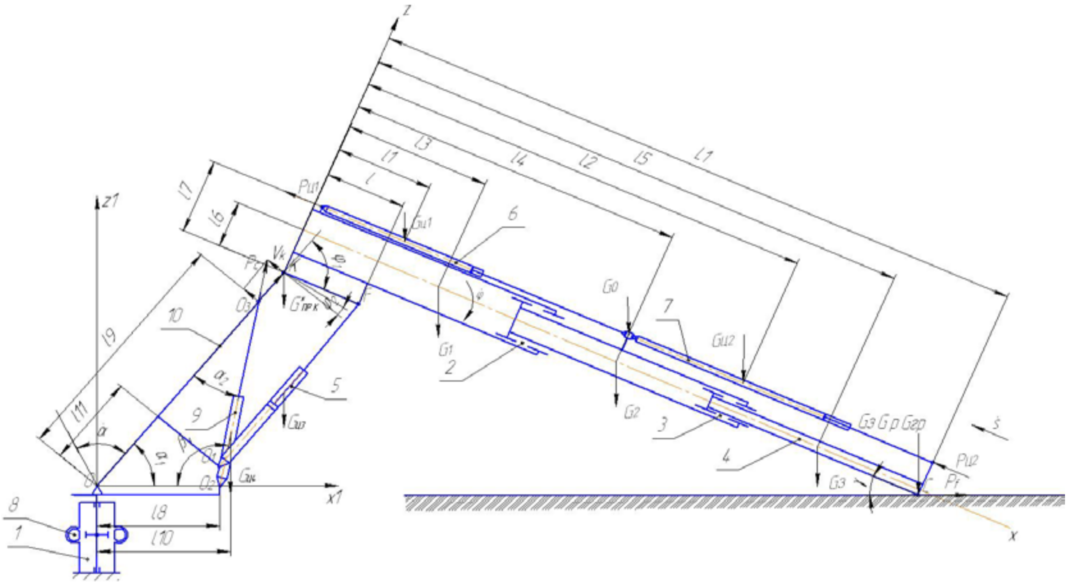
Задачи исследований. Определение кинетической энергии системы и обобщенных сил, соответствующих обобщенным координатам системы.

Методика и результаты исследований. Для разработки математических моделей в работе использованы дифференциальные уравнения Лагранжа 2-го рода.

Расчетная схема системы “технологическое оборудование – груз” представлена на рисунке. Рассматриваемый режим может иметь место при работе манипулятора в качестве технологического оборудования лесопогрузчиков, валочно-трелевочных машин, машин для бесчокерной трелевки деревьев и других лесосечных и лесотранспортных машин.

После захвата груза рабочим органом он подтягивается к машине перемещением подвижных секций телескопической стрелы при помощи механизма выдвижения секций (МВС) и поворотом колонны относительно оси О. При этом стрела совершает сложное движение: секции стрелы совершают поступательное движение относительно оси X и одновременно стрела совершает поворот относительно оси K и оси О. Полости гидроцилиндра подъема стрелы находятся в плавающем положении, что обеспечивает свободное перемещение груза по поверхности пути.

Данный режим позволяет сократить время цикла и повысить производительность поворотного лесопогрузчика. Однако следует учитывать, что при этом возникают динамические нагрузки, которые необходимо учитывать при проектировании.



Расчетная схема системы “технологическое оборудование – груз” (манипулятор с отклоняющейся колонной); 1 – опорно-поворотное устройство; 2, 3, 4 – наружная, средняя, внутренняя секции телескопической стрелы; 5 – гидроцилиндр подъёма стрелы; 6, 7 – гидроцилиндры МВС; 8 – механизм поворота манипулятора в горизонтальной плоскости; 9 – гидроцилиндр поворота колонны; 10 – колонна

На рисунке приняты следующие обозначения: G_1, G_2, G_3 – силы тяжести наружной, средней и внутренней секций стрелы; G_3, $G_{гр}$, $G_р$ – силы тяжести захвата, груза и ротатора, приведенные в точку С – точку подвеса ротатора к стреле; G_0 – силы тяжести механизма изменения вылета, приведенные к центру массы средней секции; $G_{Ц1}$, $G_{Ц2}$ – силы тяжести гидроцилиндров выдвижения секций стрелы. Принимаем $G_{Ц1} = G_{Ц2}$; $G_{Ц3}$, $G_{Ц4}$ – силы тяжести гидроцилиндров подъема стрелы и поворота колонны; $G_{ПР.К}$ – суммарная сила тяжести элементов конструкции колонны, приведенная к точке К; P_C – усилие на штоке гидроцилиндра поворота колонны; $P_{Ц1}$, $P_{Ц2}$ – усилия на штоках гидроцилиндров механизма изменения вылета, $P_{Ц1} = P_{Ц2}$; P_f – сила сопротивления перемещению дерева; L_1 – размер стрелы при выдвинутых секциях; l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 – расстояния от оси вращения стрелы К до центров тяжести элементов конструкции; l, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10}, l_{11} – размеры элементов конструкции манипулятора; α – угол поворота колонны в плоскости Z_1OX_1; $\dot{\alpha}$ – угловая скорость вращения колонны; S – ход телескопического устройства стрелы; $\dot{S}$ – скорость поступательного движения секций; φ – угол поворота стрелы в плоскости ZKX; $\dot{\varphi}$ – угловая скорость вращения стрелы; V_K – скорость перемещения колонны; γ и γ_1 – вспомогательные углы.

Стрела совершает вращение с одновременным втягиванием секций в плоскости ZKX, колонна вращается в плоскости Z_1OX_1. Углы поворота α и φ, а также величина перемещения секций S, однозначно определяют положения данных элементов системы в плоскостях вращения. Исходя из этого, данную систему можно рассматривать как систему с тремя степенями свободы (K=3) с обобщенными координатами α,S и φ.

Для составления уравнений движения данной механической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода. В соответствии с числом степеней свободы системы записываем три уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi , \qquad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_α – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате α; Q_s – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате S; Q_φ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы равна сумме кинетических энергий колонны, стрелы и груза:

$$T = T_K + T_{ГР} + T_C, \quad (2)$$

где T_K – кинетическая энергия приведенной к точке К массы колонны и элементов конструкции, смонтированных на ней (гидроцилиндров поворота колонны и подъема стрелы и других частей гидропривода); $T_{ГР}$ – кинетическая энергия груза, захвата и ротатора; T_C – кинетическая энергия массы стрелы.

Кинетическая энергия колонны равна:

$$T_K = \frac{I_O \dot{\alpha}^2}{2} = \frac{m_{ПР.К} L_K^2 \dot{\alpha}^2}{2} \quad . \quad (3)$$

Получено выражение приведенной к точке К массы колонны и элементов конструкции:

$$m_{ПР.К} = 0{,}25 m_K + 0{,}125 m_{Ц3} \cdot \frac{l^2}{L_K^2} + 0{,}125 m_{Ц4} \cdot \frac{l_8^2}{L_K^2} \quad . \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим выражение для определения кинетической энергии колонны:

$$T_K = \frac{(0{,}25 m_K + 0{,}125 m_{Ц3} \cdot \frac{l^2}{L_K^2} + 0{,}125 m_{Ц4} \cdot \frac{l_8^2}{L_K^2}) L_K^2 \dot{\alpha}^2}{2} \quad . \quad (5)$$

Так как захват, ротатор и груз перемещаются по поверхности погрузочной площадки, их кинетическая энергия равна:

$$\mathrm{T}_{\mathrm{ГР}} = \frac{(m_р + m_з + m_{гр}) \mathrm{V}_{ГС}^2}{2}, \quad (6)$$

где $V_{ГС}$ – скорость горизонтального перемещения масс $m_р$, $m_з$, $m_{гр}$ по поверхности погрузочной площадки.

Скорость $V_{ГС}$ величина переменная, напрямую зависящая от значения угла φ. Она определяется по следующим выражениям:

$$\text{При } \varphi \geq 90° \text{ и } \gamma_2 = \varphi - 90° \quad \mathrm{V}_{\mathrm{ГС}} = \mathrm{V}_{\mathrm{K}} \cos(\gamma + \gamma_2) + \dot{\mathrm{S}} \cos\gamma \ . \quad (7)$$

Скорость перемещения колонны V_K определяется из выражения:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{K}} = \dot{\alpha} \mathrm{L}_{\mathrm{K}} \ . \quad (8)$$

Таким образом, кинетическая энергия груза, захвата и ротатора для данного случая будет определяться из выражения:

$$\mathrm{T}_{\mathrm{ГР1}} = \frac{(m_р + m_з + m_{гр})(\dot{\alpha} L_K \cos(\gamma + \gamma_2) + \dot{S} \cos\gamma)^2}{2}. \quad (9)$$

$$\text{При } \varphi \leq 90° \text{ и } \gamma_2 = 90° - \varphi \quad \mathrm{V}_{\mathrm{ГС}} = \mathrm{V}_{\mathrm{K}} \cos(\gamma_2 - \gamma) + \dot{\mathrm{S}} \cos\gamma \ . \quad (10)$$

Для данного случая кинетическая энергия равна:

$$\mathrm{T}_{\text{ГР}2} = \frac{(m_р + m_з + m_{гр})(\dot{\alpha}\, L_K \cos(\gamma_2 - \gamma) + \dot{S}\cos\gamma)^2}{2} \ . \tag{11}$$

Элементы конструкции стрелы движутся с постоянной скоростью V_C, которая определяется из выражения:

$$V_{C\,i} = \sqrt{V_K^2 + \dot{S}^2 + 2V_K\dot{S}\cos\gamma_2} = \sqrt{\dot{\alpha}^2 L_K^2 + \dot{S}^2 + 2\dot{\alpha}\,\dot{S}L_K\cos\gamma_2} \ . \tag{12}$$

Кинетическая энергия системы в конце первого этапа определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{1}{2}\{&\dot{\varphi}^2[(m_3 r_5^2 + m_{Ц2}r_2^2 + m_2 r_4^2 + m_0 r_4^2 + m_{Ц1}r_1^2 + m_1 r_3^2) + (m_3(-r_5 S + 0{,}25S^2) + \\ &+ m_{Ц2}(-0{,}5r_2 S + 0{,}0625S^2)] + [\dot{\alpha}^2 L_K^2(m_3 + 0{,}5m_{Ц2} + m_2 + m_0 + m_{Ц1} + m_1) + \dot{S}^2(m_3 + 0{,}5m_{Ц2}) + \\ &+ 2\dot{\alpha}L_K\dot{S}\cos\gamma_2(m_3 + 0{,}5m_{Ц2})] + [(\dot{\alpha}^2 L_K^2\cos^2(\gamma+\gamma_2))(m_P + m_З + m_{ГР}) + \\ &+ (2\dot{\alpha}L_K\cos(\gamma+\gamma_2)\dot{S}\cos\gamma)(m_P + m_З + m_{ГР}) + (\dot{S}^2\cos^2\gamma)(m_P + m_З + m_{ГР})] + [m_{ПР.К.}L_K^2\dot{\alpha}^2]\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Кинетическая энергия системы в конце второго этапа определяется по выражению:

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{1}{2}\{&\dot{\varphi}^2[(m_1 r_3^2 + m_{Ц1}r_1^2 + m_2 r_4^2 + m_0 r_4^2 + m_3 r_5^2 + m_{Ц2}r_2^2) + (m_{Ц1}(-0{,}5r_1 S + 0{,}0625S^2) + \\ &+ m_2(-r_4 S + 0{,}25S^2) + m_0(-r_4 S + 0{,}25S^2) + m_3(-2r_5 S + S^2) + m_{Ц2}(-1{,}5r_2 S + 0{,}5625S^2)] + \\ &+ [\dot{\alpha}^2 L_K^2(m_1 + m_2 + m_3 + 0{,}5m_{Ц1} + m_{Ц2} + m_0) + \dot{S}^2(m_2 + m_3 + 0{,}5m_{Ц1} + m_{Ц2} + m_0) + \\ &+ 2\dot{\alpha}\,L_K\dot{S}\cos\gamma_2(m_2 + m_3 + 0{,}5m_{Ц1} + m_{Ц2} + m_0)] + [(\dot{\alpha}^2 L_K^2\cos^2(\gamma_2-\gamma))(m_P + m_З + m_{ГР}) + \\ &+ (2\dot{\alpha}\,L_K\cos(\gamma_2-\gamma)\dot{S}\cos\gamma)(m_P + m_З + m_{ГР}) + (\dot{S}^2\cos^2\gamma)(m_р + \mathrm{m}_з + \mathrm{m}_{гр})] + [\mathrm{m}_{ПР.К}\mathrm{L}_К^2\dot{\alpha}^2]\} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Для получения уравнений движения системы на первом и втором этапах производим дифференцирование выражений (13) и (14) по составляющим уравнений Лагранжа. Далее подставляем результаты дифференцирования кинетической энергии в левые части уравнений Лагранжа (1).

Так как гидроцилиндры подъема стрелы находятся в плавающем положении, то сила тяжести стрелы в любой момент времени распределяется между точками K и C. Составляющие силы тяжести стрелы: G_C^K – часть силы тяжести стрелы, передающаяся на колонну; G_C^C – часть силы тяжести стрелы, передающаяся на захват, ротатор и груз.

Точка приложения равнодействующей сил тяжести частей стрелы может быть определена из выражения, составленного на основании теоремы Вариньона:

$$\sum G_i l_i = G_C L_C^{'} \ , \tag{15}$$

где G_i – силы тяжести составных частей стрелы; l_i – координаты центров тяжести частей G_i относительно точки K; G_C – сила тяжести стрелы, равная сумме сил тяжести составных частей; $L_C^{'}$ – координата центра тяжести стрелы относительно точки K.

$$L_C^{'} = \frac{\sum G_i l_i}{G_C} \ . \tag{16}$$

Значение G_C^C определим из уравнения равновесия стрелы относительно точки K:

$$\sum M_K = 0 \ ; \ -G_C L_C^{'} - G_C^C L_1 = 0 \ ; \ G_C^C = \frac{G_C L_C^{'}}{L_1} . \tag{17}$$

Значение $G_C^K = G_C - G_C^C$. (18)

Значения G_C^C и G_C^K величины переменные, зависящие от размеров L_1 и $L_C^{'}$, поэтому при моделировании режима движения стрелы с грузом их необходимо определять на каждом шаге варьирования факторов.

Сила сопротивления перемещению дерева, сил тяжести стрелы, захвата и ротатора:

$$P_f = (G_Д + G_З + G_{ГР} + G_C^C)\, f. \quad (19)$$

На первом этапе движения стрелы обобщенная сила Q_{S1} равна сумме проекций всех сил, совершающих работу в направлении обобщенной координаты S, то есть $Q_{S1} = \sum F_{S1}$.

Составляющая силы сопротивления P_f на первом этапе движения P_{f1} на направление координаты S:

$$P_{f1S} = P_{f1}\cos\gamma = (G_Д + G_З + G_{ГР} + G_C^C)\, f\, \cos\gamma. \quad (20)$$

Отсюда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате S для первого этапа $0 \le \Delta S \le 0{,}5S$, будет равна:

$$Q_{S1} = \sum P_{Si} = P_{Ц2} - [(0{,}5G_{Ц2} + G_3 + G_P + G_З + G_{ГР})\cdot\sin\gamma + P_{f1}\cdot\cos\gamma]. \quad (21)$$

Обобщенная сила $Q_{\varphi 1}$ в конце первого этапа движения равна сумме моментов всех сил относительно точки К, совершающих работу в данном направлении:

$$\begin{aligned} Q_{\varphi 1} = \sum M_K = [&-G_{Ц2}(l_2 - 0{,}25S) - G_3(l_5 - 0{,}5S) - (G_P + G_З + G_{ГР})(L_1 - 0{,}5S) - \\ &- G_0 l_4 - G_2 l_4 - G_{Ц1} l_1 - G_1 l_3]\cos\gamma - P_f \sin\gamma(L_1 - 0{,}5S) - (G_{Ц1} + G_0 + G_{Ц2}) l_7 \sin\gamma + \\ &+ (G_1 + G_2 + G_3 + G_P + G_З + G_{ГР}) l_6 \sin\gamma - P_f \cos\gamma l_6. \end{aligned} \quad (22)$$

Обобщенная сила $Q_{\alpha 1}$ равна сумме моментов всех сил, совершающих работу относительно оси вращения колонны:

$$Q_{\alpha 1} = \sum M_O = P_C \sin\alpha_2 l_9 - [(G_C^K + G_{ПР.К}^K) L_K \cos\alpha_1 + P_f \cos\gamma (L_K + l_6)]. \quad (23)$$

По аналогии получены обобщенные силы для второго этапа движения стрелы:

$$Q_{S2} = \sum P_{Si} = P_{Ц1} - [(G_{Ц2} + 0{,}5G_{Ц1} + G_3 + G_2 + G_0 + G_P + G_З + G_{ГР})\cdot\sin\gamma + P_{f2}\cdot\cos\gamma]. \quad (24)$$

$$\begin{aligned} Q_{\varphi 2} = \sum M_K = [&-G_{Ц2}(l_2 - 0{,}75S) - G_3(l_5 - S) - (G_P + G_З + G_{ГР})(L_1 - S) - G_0(l_4 - 0{,}5S) - G_2(l_4 - 0{,}5S) - \\ &- G_{Ц1}(l_1 - 0{,}25S) - G_1 l_3]\cos\gamma - P_f \sin\gamma(L_1 - S) - (G_{Ц1} + G_0 + G_{Ц2}) l_7 \sin\gamma + \\ &+ (G_1 + G_2 + G_3 + G_P + G_З + G_{ГР}) l_6 \sin\gamma - P_f \cos\gamma l_6. \end{aligned} \quad (25)$$

$$Q_{\alpha 2} = \sum M_O = P_C \sin\alpha_2 l_9 - [(G_C^K + G_{ПР.К}^K) L_K \cos\alpha_1 + P_f \cos\gamma (L_K + l_6)]. \quad (26)$$

Подставив выражения обобщенных сил $Q_{S1}, Q_{S2}, Q_{\varphi 1}, Q_{\varphi 2}, Q_{\alpha 1}, Q_{\alpha 2}$ в правые части уравнений Лагранжа (1), получим полные уравнения движения системы “рабочее оборудование – груз” для первого и второго этапов $0 \le \Delta S \le 0{,}5S$ и $0{,}5S \le \Delta S \le S$.

Математическая модель движения системы “рабочее оборудование-груз” для первого этапа движения ($0 \le \Delta S \le 0{,}5S$) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{S}(m_3+0{,}5m_{\text{Ц}2})+\ddot{\alpha}(m_3L_K\cos\gamma_2+0{,}5m_{\text{Ц}2}L_K\cos\gamma_2)-\\
&-\dot{\alpha}(m_3L_K\sin\gamma_2\cdot\dot{\gamma}_2+0{,}5m_{\text{Ц}2}L_K\sin\gamma_2\cdot\dot{\gamma}_2)+\\
&+\ddot{\alpha}(\mathrm{m_p}L_K\cos(\gamma+\gamma_2)\cos\gamma+\mathrm{m_3}L_K\cos(\gamma+\gamma_2)\cos\gamma+\mathrm{m_{ГР}}L_K\cos(\gamma+\gamma_2)\cos\gamma)-\\
&-\dot{\alpha}(\mathrm{m_p}L_K\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'\cos\gamma+\mathrm{m_3}L_K\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'\cos\gamma+\\
&+\mathrm{m_{ГР}}L_K\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'\cos\gamma)-\dot{\alpha}(\mathrm{m_p}L_K\cos(\gamma+\gamma_2)\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}+\\
&+\mathrm{m_3}L_K\cos(\gamma+\gamma_2)\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}+\mathrm{m_{ГР}}L_K\cos(\gamma+\gamma_2)\sin\gamma\cdot\dot{\gamma})+\\
&+\ddot{S}(m_P\cos^2\gamma+m_3\cos^2\gamma+m_{ГР}\cos^2\gamma)-\\
&-2\dot{S}(m_P\cos\gamma\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}+m_3\cos\gamma\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}+m_{ГР}\cos\gamma\sin\gamma\cdot\dot{\gamma})]-\\
&-[\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\langle m_3(-r_5+0{,}5S)+m_{\text{Ц}2}(-0{,}5r_2+0{,}125S)\rangle]=\\
&=P_{\text{Ц}2}-[(0{,}5G_{\text{Ц}2}+G_3+G_P+G_3+G_{ГР})\cdot\sin\gamma+P_{f1}\cdot\cos\gamma],\\
&\ddot{\varphi}[m_3(r_5^2-r_5S+0{,}25S^2)+m_{\text{Ö}2}(r_2^2-0{,}5r_2S+0{,}0625S^2)+\\
&+m_2r_4^2+m_0r_4^2+m_{\text{Ö}1}r_1^2+m_1r_3^2]+\dot{\varphi}[m_3(r_5\dot{S}+0{,}25\cdot 2S\cdot\dot{S})+\\
&+m_{\text{Ö}2}(0{,}5r_2\dot{S}+0{,}0625\cdot 2S\cdot\dot{S})]=[-G_{\text{Ö}2}(l_2-0{,}25S)-G_3(l_5-0{,}5S)-\\
&-(G_{\text{Ð}}+G_{\text{Ç}}+G_{\text{ÃÐ}})(L_1-0{,}5S)-G_0\,l_4-G_2\,l_4-G_{\text{Ö}1}\,l_1-G_1\,l_3]\cos\gamma-\\
&-P_f\sin\gamma(L_1-0{,}5S)-(G_{\text{Ö}1}+G_0+G_{\text{Ö}2})l_7\sin\gamma+\\
&+(G_1+G_2+G_3+G_{\text{Ð}}+G_{\text{Ç}}+G_{\text{ÃÐ}})l_6\sin\gamma-P_f\cos\gamma l_6\\
&[\ddot{\alpha}(L_K^2m_3+L_K^2\,0{,}5m_{\text{Ц}2}+L_K^2m_2+L_K^2m_{_0}+L_K^2m_{\text{Ц}1}+L_K^2m_1)+\\
&+\ddot{S}(m_3L_K\cos\gamma_2+0{,}5m_{\text{Ц}2}L_K\cos\gamma_2)-\dot{S}(m_3L_K\sin\gamma_2\dot{\gamma}_2+0{,}5m_{\text{Ц}2}L_K\sin\gamma_2\dot{\gamma}_2)+\\
&+\ddot{\alpha}(\mathrm{m_P L_K^2}\cos^2(\gamma+\gamma_2)+\mathrm{m_3L_K^2}\cos^2(\gamma+\gamma_2)+\mathrm{m_{ГР}L_K^2}\cos^2(\gamma+\gamma_2))-\\
&-2\dot{\alpha}(\mathrm{m_PL_K^2}\cos(\gamma+\gamma_2)\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'+\\
&+\mathrm{m_3L_K^2}\cos(\gamma+\gamma_2)\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'+\\
&+\mathrm{m_{ГР}L_K^2}\cos(\gamma+\gamma_2)\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)')+\\
&+\ddot{\mathrm{S}}(\mathrm{m_PL_K}\cos(\gamma+\gamma_2)\cos\gamma+\mathrm{m_3L_K}\cos(\gamma+\gamma_2)\cos\gamma+\mathrm{m_{ГР}L_K}\cos(\gamma+\gamma_2)\cos\gamma)-\\
&-\dot{\mathrm{S}}(\mathrm{m_PL_K}\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'\cos\gamma+\mathrm{m_3L_K}\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'\cos\gamma+\\
&+\mathrm{m_{ГР}\,L_K}\sin(\gamma+\gamma_2)(\gamma+\gamma_2)'\cos\gamma)-\\
&-\dot{\mathrm{S}}(\mathrm{m_PL_K}\cos(\gamma+\gamma_2)\sin\gamma\dot{\gamma}+\mathrm{m_3L_K}\cos(\gamma+\gamma_2)\sin\gamma\dot{\gamma}+\mathrm{m_{ГР}L_K}\cos(\gamma+\gamma_2)\sin\gamma\dot{\gamma})+\\
&+\ddot{\alpha}\mathrm{m_{ПР.К}L_K^2}]=P_C\sin\alpha_2\,l_9-[(G_C^K+G_{ПР.К}^K)L_K\cos\alpha_1+P_f\cos\gamma(L_K+l_6)].
\end{aligned}\tag{27}$$

Математическая модель движения системы “рабочее оборудование – груз” для второго этапа движения (0,5S ≤ ΔS ≤ S) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&[\ddot{S}(m_2+m_3+0{,}5m_{\text{Ц}1}+m_{\text{Ц}2}+m_0)+\ddot{\alpha}(m_2L_K\cos\gamma_2+m_3L_K\cos\gamma_2+\\
&+0{,}5m_{\text{Ц}1}L_K\cos\gamma_2+m_{\text{Ц}2}L_K\cos\gamma_2+m_0L_K\cos\gamma_2)-\dot{\alpha}(m_2L_K\sin\gamma_2\cdot\dot{\gamma}_2+\\
&+m_3L_K\sin\gamma_2\cdot\dot{\gamma}_2+0{,}5m_{\text{Ц}1}L_K\sin\gamma_2\cdot\dot{\gamma}_2+m_{\text{Ц}2}L_K\sin\gamma_2\cdot\dot{\gamma}_2+m_0L_K\sin\gamma_2\cdot\dot{\gamma}_2)+\\
&+\ddot{\alpha}(m_PL_K\cos(\gamma_2-\gamma)\cos\gamma+m_3L_K\cos(\gamma_2-\gamma)\cos\gamma+m_{ГР}L_K\cos(\gamma_2-\gamma)\cos\gamma)-\\
&-\dot{\alpha}(m_PL_K\sin(\gamma_2-\gamma)(\gamma_2-\gamma)'\cos\gamma+m_3L_K\sin(\gamma_2-\gamma)(\gamma_2-\gamma)'\cos\gamma+\\
&+m_{ГР}L_K\sin(\gamma_2-\gamma)(\gamma_2-\gamma)'\cos\gamma)-\dot{\alpha}(m_PL_K\cos(\gamma_2-\gamma)\sin\gamma\cdot\gamma'+\\
&+m_3L_K\cos(\gamma_2-\gamma)\sin\gamma\cdot\gamma'+m_{ГР}L_K\cos(\gamma_2-\gamma)\sin\gamma\cdot\gamma')+\\
&+\ddot{S}(m_P\cos^2\gamma+m_3\cos^2\gamma+m_{ГР}\cos^2\gamma)-2\dot{S}(m_P\cos\gamma\sin\gamma\cdot\gamma'+m_3\cos\gamma\sin\gamma\cdot\gamma'+\\
&+m_{ГР}\cos\gamma\sin\gamma\cdot\gamma')]-[\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\{m_{\text{Ц}1}(-0{,}5r_1+0{,}125S)+m_2(-r_4+0{,}5S)+\\
&+m_0(-r_4+0{,}5S)+m_3(-2r_5+2S)+m_{\text{Ц}2}(-1{,}5r_2+1{,}125S)\}]=\\
&=P_{\text{Ц}1}-[(G_{\text{Ц}2}+0{,}5G_{\text{Ц}1}+G_3+G_2+G_0+G_P+G_3+G_{ГР})\cdot\sin\gamma+P_{f2}\cdot\cos\gamma].
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}[m_1 r_3^2 + m_{Ö1}(r_1^2 - 0{,}5 r_1 S + 0{,}0625 S^2) + m_2(r_4^2 - r_4 S + 0{,}25 S^2) + \\
&+ m_0(r_4^2 - r_4 S + 0{,}25 S^2) + m_3(r_5^2 - 2 r_5 S + S^2) + \\
&+ m_{Ö2}(r_2^2 - 1{,}5 r_2 S + 0{,}5625 S^2)] + \dot{\varphi}[m_{Ö1}(0{,}5 r_1 \dot{S} + 0{,}0625 \cdot 2S \cdot \dot{S}) + \\
&+ m_2(r_4 \dot{S} + 0{,}25 \cdot 2S \cdot \dot{S}) + m_0(r_4 \dot{S} + 0{,}25 \cdot 2S \cdot \dot{S}) + \\
&+ m_3(2 r_5 \dot{S} + 2S \cdot \dot{S}) + m_{Ö2}(1{,}5 r_2 \dot{S} + 0{,}5625 \cdot 2S \cdot \dot{S})] = \\
&= [-G_{Ö2}(l_2 - 0{,}75 S) - G_3(l_5 - S) - (G_{Ð} + G_{Ç} + G_{ÃÐ})(L_1 - S) - \\
&- G_0(l_4 - 0{,}5 S) - G_2(l_4 - 0{,}5 S) - G_{Ö1}(l_1 - 0{,}25 S) - G_1 l_3] \cos\gamma - \\
&- P_f \sin\gamma (L_1 - S) - (G_{Ö1} + G_0 + G_{Ö2}) l_7 \sin\gamma + \\
&+ (G_1 + G_2 + G_3 + G_{Ð} + G_{Ç} + G_{ÃÐ}) l_6 \sin\gamma - P_f \cos\gamma\, l_6
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\ddot{\alpha}(L_K^2 m_1 + L_K^2 m_2 + L_K^2 m_3 + L_K^2 0{,}5 m_{Ц1} + L_K^2 m_{Ц2} + L_K^2 m_0) + \ddot{S}(m_2 L_K \cos\gamma_2 + m_3 L_K \cos\gamma_2 + \\
&+ 0{,}5 m_{Ц1} L_K \cos\gamma_2 + m_{Ц2} L_K \cos\gamma_2 + m_0 L_K \cos\gamma_2) - \dot{S}(m_2 L_K \sin\gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2 + \\
&+ m_3 L_K \sin\gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2 + 0{,}5 m_{Ц1} L_K \sin\gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2 + m_{Ц2} L_K \sin\gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2 + m_0 L_K \sin\gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2) + \\
&+ \ddot{\alpha}(m_P L_K^2 \cos^2(\gamma_2 - \gamma) + m_З L_K^2 \cos^2(\gamma_2 - \gamma) + m_{ГР} L_K^2 \cos^2(\gamma_2 - \gamma)) - \\
&- 2\dot{\alpha}(m_P L_K^2 \cos(\gamma_2 - \gamma)\sin(\gamma_2 - \gamma)(\gamma_2 - \gamma)' + m_З L_K^2 \cos(\gamma_2 - \gamma)\sin(\gamma_2 - \gamma)(\gamma_2 - \gamma)' + \\
&+ m_{ГР} L_K^2 \cos(\gamma_2 - \gamma)\sin(\gamma_2 - \gamma)(\gamma_2 - \gamma)') + \ddot{S}(\mathrm{m_P L_K}\cos(\gamma_2 - \gamma)\cos\gamma + \\
&+ m_З \mathrm{L_K}\cos(\gamma_2 - \gamma)\cos\gamma + m_{ГР}\mathrm{L_K}\cos(\gamma_2 - \gamma)\cos\gamma) - \dot{S}(\mathrm{m_P L_K}\sin(\gamma_2 - \gamma)(\gamma_2 - \gamma)'\cos\gamma + \\
&+ m_З \mathrm{L_K}\sin(\gamma_2 - \gamma)(\gamma_2 - \gamma)'\cos\gamma + m_{ГР}\mathrm{L_K}\sin(\gamma_2 - \gamma)(\gamma_2 - \gamma)'\cos\gamma) - \\
&- \dot{S}(\mathrm{m_P L_K}\cos(\gamma_2 - \gamma)\sin\gamma \cdot \dot{\gamma} + m_З \mathrm{L_K}\cos(\gamma_2 - \gamma)\sin\gamma \cdot \dot{\gamma} + \\
&+ m_{ГР}\mathrm{L_K}\cos(\gamma_2 - \gamma)\sin\gamma \cdot \dot{\gamma}) + \ddot{\alpha} m_{ПР.К.} L_K^2] = \\
&= P_C \sin\alpha_2\, l_9 - [(G_C^K + G_{ПР.К}^K) L_K \cos\alpha_1 + P_f \cos\gamma (L_K + l_6)].
\end{aligned}
$$

Заключение. В результате проделанной работы получены математические модели движения системы “технологическое оборудование – груз” поворотного лесопогрузчика в режиме подтягивания груза, позволяющие исследовать влияние на уровень динамических нагрузок на элементы конструкции конструктивных и эксплуатационных факторов (скорость поступательного движения секций, угловая скорость вращения стрелы, угловая скорость вращения колонны и т.д.).

Литература

1. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
2. *Яблонский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 2. Динамика. – М.: Высш. шк., 1966. – 411 с.
3. *Полетайкин В.Ф.* Проектирование специальных лесных машин: учеб. пособие. – Красноярск: Изд-во СибГТУ, 2011. – 282 с.
4. *Колесников П.Г.* Моделирование рабочих режимов лесопогрузчика с переменным вылетом груза: монография. – Красноярск: СибГТУ, 2007. – 128 с.
5. *Полетайкин В.Ф.* Прикладная механика лесных подъемно-транспортных машин. Лесопогрузчики гусеничные: монография. – Красноярск: СибГТУ, 2010. – 280 с.